Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного ОДУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2 курс,
3 семестр
ЛЕКЦИИ
Domрина Александра Владимировна

Лекция 1

4.09.08

1. Понятие числового ряда

$\{a_n\}$ – числовая посл-ть

Формальное выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (*) – ЧИСЛОВОЙ РЯД

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – n-я частичная сумма

a_k – k-й член ряда (*)

Если $\exists$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (*) называется сходящимся, а величина $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}$ называется суммой ряда. Если посл-ть $\{S_n\}$ расходится, то ряд (*) называется расходящимся.

<u>Пример</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ – геометр. прогрессия.

$$S_n = \begin{cases} n, & q=1 \\ \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится $\Leftrightarrow |q|<1$ (при этом Σ ряда $= \frac{1}{1-q}$)

Свойства:

1. (линейность). Если ряд (*) сходится к сумме S и C – произвольное число, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ сх. к сумме CS.
$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to CS\right)$

2. (аддитивность) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$ (2 сходящихся ряда). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = S_a+S_b$.
$\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \to S_a+S_b\right)$

<u>Замечание</u>: Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на их сходимость.

2. Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд (*) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n\geq N(\varepsilon), \forall p\in\mathbb{N}\ |S_n - S_{n+p}|<\varepsilon$.

Рассмотрим $p=1$.

Если ряд (*) сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример: гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (необходимое условие выполнено: $\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$).

Покажем, что ряд расходится. Рассмотрим $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\forall N$: $n=p=N$

$$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon \Rightarrow$$ выполнено отрицание условия Коши.

3. Ряды с неотрицательными членами и признаки сравнения.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ (**), $p_n\geq 0$, $\forall n$.

$\{S_n\}$ - неубывающая посл-ть.

Ряд (**) сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть $\{S_n\}$ ограничена. !:)

I признак сравнения

$\exists\ 0\leq p_n\leq q_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\exists$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ сх-ся. Тогда ряд (**) сх-ся.

Если ряд (**) расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ так же расходится.

Д-во: $S_n^p=\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, $S_n^q=\sum\limits_{k=1}^{n} q_k \Rightarrow 0\leq S_n^p\leq S_n^q$.

Если $\{S_n^q\}$ ограничено $\Rightarrow \{S_n^p\}$ ограничено, а если $\{S_n^p\}$ не ограничена $\Rightarrow \{S_n^q\}$ не ограничена.

Замечание: Признак остается в силе, если нер-во $0\leq p_n\leq q_n$ верно начиная с некоторого номера n_0.

II признак сравнения

$\exists\ q_n>0$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=L\neq 0$. Тогда ряды (**) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ (***) сходятся или расходятся одновременно.

Док-во: $L>0$ $\exists n_0$: $\forall n>n_0$ $\frac{L}{2}\leq\frac{p_n}{q_n}\leq L+1 \Rightarrow p_n\leq (L+1)q_n \Rightarrow$ если ряд (***) сх, то и ряд (**) сход.

$q_n\leq\frac{2}{L}p_n \Rightarrow$ если ряд (**) сх., то и ряд (***) сх.

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(2n-1)}{1/n}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ тоже расходится.

III признак сравнения

$p_n, q_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Если $\boxed{\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq\frac{q_{n+1}}{q_n},\ n\geq n_0}$ (т.е. $\exists n_0$:)

Тогда $(*_q)$ сх $\Rightarrow (*_p)$ сх., $(*_p)$ расх. $\Rightarrow (*_q)$ расх.

Д-во: $\exists\ n>n_0$

$$\frac{p_{n_0+1}}{p_{n_0}}\leq\frac{q_{n_0+1}}{q_{n_0}}$$
$$\frac{p_{n_0+2}}{p_{n_0+1}}\leq\frac{q_{n_0+2}}{q_{n_0+1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq\frac{q_{n+1}}{q_n}$$

перемножим

$$\frac{p_{n_0+1}}{p_{n_0}}\cdot\frac{p_{n_0+2}}{p_{n_0+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq\frac{q_{n_0+1}}{q_{n_0}}\cdot\frac{q_{n_0+2}}{q_{n_0+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{q_{n+1}}{q_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_{n_0}}\leq\frac{q_{n+1}}{q_{n_0}}\Leftrightarrow p_{n+1}\leq\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}q_{n+1}$$

const!

$\Rightarrow$ по 1-му пр. сравнения

$(*_p)$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}q_n$ сх. $\Rightarrow (*_q)$ сх.

А если $(*_p)$ расх. $\Rightarrow (*_q)$ расх.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$

4 Признаки Даламбера и Коши, их сравнения.

Признак Даламбера $\exists\ p_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ и $\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq q<1$ при $n\geq n_0$ (соответственно $\frac{p_{n+1}}{p_n}\geq 1$). Тогда $(*_p)$ сход (соотв. расходится)

Д-во $q_n=q^{n-1}\Rightarrow\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq q=\frac{q_{n+1}}{q_n}$ $n\geq n_0$.

Т.к. $(*_q)$ сход., то $(*_p)$ сход. (соотв. $p_{n+1}\geq p_n\Rightarrow p_n\not\to 0$ $(*_p)$ расходится)

Признак Даламбера (в предельной форме)

$\exists\ p_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=L$, то при $L<1$ $(*_p)$ сход, а если $L>1$, $(*_p)$ расх.

Д-во: 1. $L<1$

$\exists\ q\in(L,1)$

$\exists n_0$: $\frac{p_{n+1}}{p_n}\leq q$, $n\geq n_0\Rightarrow (*_p)$ сх. по признаку Даламбера.

2. $L>1$

$\exists n_0$: $\frac{p_{n+1}}{p_n}\geq 1$, $n\geq n_0\Rightarrow (*_p)$ расх по пр. Даламбера

Замечание 1. Если $L=1$, то может быть как сходимость, так и расходимость.

Например:

$p_n = \frac{1}{n}$ $(*_p)$ расх. $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

Рассмотрим еще ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad p_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, ряд сходится

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \to 1$$

Замечание 2. Если $L>1 \Rightarrow$ нарушено необх. условие сходимости. (т.е. этот признак ничего не дает по сравнению с предыдущим)

Замечание 3. Признак Даламбера применим лишь к монот. (последовательности) ТОЧ! рядам $\{p_n\}$.

Его удобно применять, когда есть реккурентное отношение. (например, если есть факториалы...)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ ряд сходится.

6.09.08 Лекция 2

Признак Коши $(*_p)$ $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$, $p_n \geq 0$

Если $\exists q \in [0,1)$: $\sqrt[n]{p_n} \leq q$, $n \geq n_0$, то $(*_p)$ сходится

Если $\sqrt[n]{p_n} \geq 1$, $n \geq n_0$, то $(*_p)$ расх

Д-во:

$q = q \quad \sum_{n=1}$

Мое доказательство:

$\sqrt[n]{p_n} \leq q < 1$

$p_n \leq q^n < 1$ Бред!!! (lim, не бред!)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ – сумма геом. прогрессии, сход.

$= \frac{q}{1-q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится

$\sqrt[n]{p_n} \geq 1$ $p_n \geq 1$ $\forall n \geq n_0$ – нарушено необх. условие сх-ти

Признак Коши в предельной форме

Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = L$, то тогда при $L>1$ $(*)_p$ расходится, $L<1$ $(*_p)$ сходится

1. $L<1 \Rightarrow \exists q \in (L,1)$ $\quad L \; q \; 1$

По опр. lim $\exists n_0$:

$\sqrt[n]{p_n} \leq q$, $n \geq n_0 \Rightarrow$ ряд $(*_p)$ сходится по предыдущ. утв.

2. $L>1 \Rightarrow$

по опр. предела, начиная с n_0 $\sqrt[n]{p_n} \geq 1 \overset{n \geq n_0}{\Rightarrow} p_n \not\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $(*_p)$ расходится.

Замечание 1. $L>1$ – не выполнено необходимое условие сх-ти $\Rightarrow$ ничего нового этот признак не дает

Замечание 2. $L=1$ ничего нового признак не дает. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, однако $\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\downarrow 1}} \to 1$.

Покажем, что признак Коши сильнее признака Даламбера. (если ряд сх. по Коши $\Leftarrow$ ряд сх. и по Дал. Обратное неверно)

Сравнение признаков Коши и Даламбера.

1. Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} \not\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$, т.е. из сходимости ряда по Коши $\not\Rightarrow$ сх-ть ряда по Даламберу

2. Если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L$, то $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = L$

1. $p_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ – нечетно, т.е. } n=2k-1 \\ \frac{n}{2^n}, & \text{если } n \text{ – четно, т.е. } n=2k \end{cases}$

Тогда $\sqrt[n]{p_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{p_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[n]{p_n} \geq \frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow$ ряд сх. по пр. Коши

$$\frac{p_{2k+2}}{p_{2k+1}} = \frac{2k+2}{2^{2k+2}} \cdot 2^{2k+1} = k+1 \to \infty$$

$$\frac{p_{2k+1}}{p_{2k}} = \frac{1 \cdot 2^{2k}}{2^{2k+1} \cdot 2k} = \frac{1}{4k} \to 0$$

Д-во 2-го утв-я – на основании леммы.

Лемма 1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, a_n – числовая посл-ть. Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$, $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{\overbrace{(a_1 - a) + \ldots}^{N} + \overbrace{\ldots + (a_n - a)}^{n-N}}{n}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{a_1 - a + \ldots + a_N - a}{n}\right|}_{J_1} + \underbrace{\left|\frac{a_{N+1} - a + \ldots + a_n - a}{n}\right|}_{J_2}$$

$$J_2 \leq \frac{\overbrace{|a_{N+1} - a| + \ldots + |a_n - a|}^{(n-N) \text{ слагаемых}}}{n} < \frac{\varepsilon(n-N)}{n} < \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$J_1 = \frac{\overbrace{|a_1 - a + \ldots + a_N - a|}^{\text{const, не зависит от } n}}{n} \to 0 \text{ при } n\to\infty \Rightarrow J_1 < \varepsilon \text{ для достаточно больших } n.$$

т.о. $\left|\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} - a\right| \le 2\varepsilon$ для дост. больших n

Замечание. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = +\infty$

(соотв. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = -\infty$)

Д-во. $\forall C>0\ \exists N(C):\ a_n \ge 4C,\ n \ge N$

$n > 2N$ $\quad \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \underbrace{\frac{a_1+\ldots+a_N}{n}}_{\sigma_1} + \underbrace{\frac{a_{N+1}+\ldots+a_n}{n}}_{\sigma_2}$

$\sigma_2 > \frac{4C(n-N)}{n} = 4C\left(1-\frac{N}{n}\right) \ge 4C\left(1-\frac12\right) = 2C$. $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 > -C$

$\frac12 \ge \frac{N}{n}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $n \ge N_2$

$n \ge 2N$.

$\Rightarrow \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \ge 2C - C = C,$

$n \ge \max(2N, N_2)$

Лемма 2 (о среднем геометрическом)

$a_n > 0\ \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = a$

Д-во: 1) Если $a \ne 0$, то тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \ln a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ldots+\ln a_n}{n} = \ln a$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \to a$ $\qquad$ $\ln\left(\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\right)$ $\qquad$ $\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\right)$

2) Если $a=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ldots+\ln a_n}{n} = -\infty$

$\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\right) \Rightarrow \ln\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \to -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \to 0$

Лемма 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n} = L$

Положим $p_0 = 1$ $\qquad a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = L \Rightarrow \sqrt[n]{p_n} \to L$

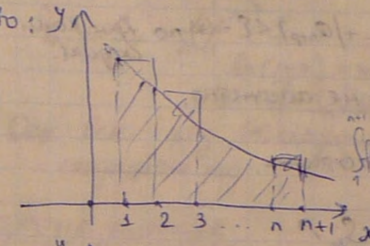
Но $a_1\cdot\ldots\cdot a_n = \frac{p_1}{\underset{1}{p_0}}\cdot\frac{p_2}{p_1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_n}{p_{n-1}} = p_n$

Если $\{p_n\}$ - монот.

Интегральный признак Коши-Маклорена

Пусть $\exists$ ф-я $f(x)$ - неотр. невозраст. при $x \ge 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится /расходится $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сх/расх.

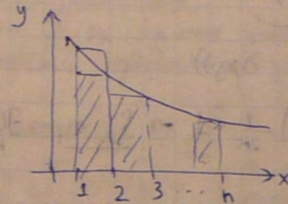
Д-во:



$f(1)+\ldots+f(n) \ge \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ (1)

$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \le \int_1^{n} f(x)\,dx$

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le f(1)+\ldots+f(n) \le f(1)+\int_1^{n} f(x)\,dx$ (2)



(1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сх. $\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится

Обратно: $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$, то (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n \le f(1) + \int_1^{n} f(x)\,dx \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \{S_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ ряд сходится

Пример 1 (обобщенный гармонич. ряд) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $\qquad s \le 0 \Rightarrow \frac{1}{n^s} \not\to 0 \Rightarrow$ ряд расходится

$s>0$: $\frac{1}{x^s}$ - неотрицат., невозраст. $\Rightarrow$ по интегр. признаку Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ сходится $\Leftrightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}$ сходится $\underset{1\text{ курс}}{\Leftrightarrow}$ $s > 1$

Ответ: $s \le 1$ - расх., $s > 1$ - сходится

Пример 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ $\qquad S_n = 1+\frac12+\ldots+\frac1n$. С одной стороны:

(1) $\Rightarrow S_n \ge \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln(x+1)\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac1n\right)$

(2) $\Rightarrow S_n \le 1 + \int_1^{n}\frac{dx}{x} = \ln n + 1 \Rightarrow S_n = \ln n + \underline{O(1)}$ (какая-то огранич. посл-ть)

Можно д-ть $S_n = \ln n + C_2 + \alpha_n$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$

Ряды с произв. значением. Абсолютн. сх-ть

(*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Опр-е Ряд (*) назыв. абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сх-ся

Теорема Если (*) сх. абсолютно, то (*) сходится.

Д-во. Восп-ся Критерием Коши сх-ти (**)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall n \ge N,\ \forall p \in \mathbb{N}$

$|a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$

Но $|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| \leq |a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow (*)$ по крит. Коши сходится.

Пример ряда, кот. сх-ся, но не абсолютно.

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \sum |a_n| \text{ расходится.}$$

$$S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \quad \underline{S_{2n} \nearrow}$$

$$= \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}\right. \text{ мое … бред))}$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n} < 1 \to \underline{S_{2n} \text{ огр}} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{\frac{1}{2n+1}\to 0} S$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + R_n(x)$$

$$\ln 2 = S_n + \underset{\to 0}{R_n(1)} \quad (x=1)$$

Опр. Если $(*)$ сходится, $(**)$ расходится, то $(*)$ – условно сходящийся.

Далее:

Теорема Римана

Теорема Коши.

11.09.08 Лекция 3

РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

Абсолютная сходимость

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Опр. $(*)$ сходится абсолютно, если сх-ся $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ $(**)$

Теорема Ряд сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд сходится

Д-во: КК сход-ти $(**)$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$

Критерий Коши $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| < |a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow (*)$

Example: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\sum |a_n|$ расходится

$$S_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) = S_{2n} \nearrow$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\ldots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n} < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{\frac{1}{2n+1}\to 0} S$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + R_n(x)$$

$$\ln(2) = S_n + \underset{\to 0}{R_n(1)}$$

Опр. Если ряд $(*)$ сходится, а $(**)$ расходится, то $(*)$ – условно сходящийся ряд.

ТЕОРЕМА РИМАНА

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда $\forall L$ (включая $L=+\infty$, $L=-\infty$) можно так переставить члены ряда, что новый ряд будет сходиться к L.

Доказательство: $\square$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится

$$p_n = \frac{1}{2}(|a_n|+a_n) = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \to \infty$$

$$q_n = \frac{1}{2}(|a_n|-a_n) = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ |a_n|, & a_n < 0 \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to \infty$$

Положительных членов ряда бесконечно много $\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty\right)$, и отрицательных тоже $\left(\sum_{n=1}^{\infty} q_k \to \infty\right)$

$\exists\ 0 \leq \alpha < \infty$ (можно считать, что все члены ряда ненулевые)

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ – идущие в порядке возрастания индексов положит. члены ряда,

$\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ – модули идущих в порядке возрастания индексов отрицательных членов.

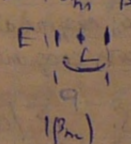
здесь n_1: $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_1-1} < \alpha$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_1} \geq \alpha$ (если $\alpha_1 \geq \alpha \Rightarrow n_1 = 1$)

n_2: $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_1}-\beta_1-\ldots-\beta_{n_2-1} \geq \alpha$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_1}-\beta_1-\ldots-\beta_{n_2} < \alpha$

Новый ряд имеет вид: $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_1}-\beta_1-\ldots-\beta_{n_2}+\alpha_{n_1+1}+\ldots$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1} > L \qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{n_2-1} > L$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}-\beta_1-\beta_2-\ldots+\beta_{n_2-1}-\beta_{n_2} < L$$



S'_j – j-я частичная сумма нового ряда. При $j > n_1$ $|S'_j - l| (\le)$ не превосходит модуля последнего элемента последней завершенной группы (члена)

Т.е., если $\underbrace{j \ge n_1, j < n_2}_{n_2 + n_1 < n_3 + n_2}$, то $|S'_j - l| \le \alpha_{n_1}$

$|S'_j - l| \le \beta_{n_2}$ $\begin{cases} \alpha_{n_i} \to 0 \text{ при } i \to \infty \\ \beta_{n_i} \to \end{cases}$

На $\forall$ шаге добавляется хотя бы 1 элемент первоначального ряда.

$\Rightarrow$ новый ряд содержит все члены исходного ряда.

Т.к. первоначальный ряд сходится ($\sum a_j$ сх), то $a_j \to 0$ (необходимое условие) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_j \to 0, \beta_j \to 0 \Rightarrow$ все модули „+" и „–" членов $\Rightarrow 0 \Rightarrow$ новый ряд сходится к l.

Разберем случай $l = +\infty$

Берем n_1: $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n_1} \ge 1$. Затем выбираем n_2 (ряд расх $\Rightarrow$ это можно сделать)

$$n_2: \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n_1} - \beta_1 + \beta_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} > 2$$

$\ldots$

$$n_3: \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n_1} - \beta_2 + a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3} > 3$$

$\Rightarrow$ новый ряд содержит все члены исходного ряда $\Rightarrow$ новый ряд расходится

$\beta_j \to 0 \Rightarrow$ новый ряд сх. к ∞ (т.к. промежуточная $\Sigma = n - \beta_n$)

Если $l < 0$, $l = -\infty$ | Аналогично, но начиная надо с отрицат. членов, либо рассматривать ряд $+\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$. Переставлять далее его члены так, чтобы новый ряд сходился и $\underline{-l}$. (всо – не –)

<u>Теорема</u> Пусть $\overset{(*)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ сходится абсолютно, $\overset{(**)}{\sum_{n=1}^{\infty} a'_n}$ – ряд, полученный из (*) перестановкой членов $\Rightarrow$ ряд (**) сходится абсолютно и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$.

<u>Док-во.</u>

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \quad \sum_{n=1}^{n} |a_n| < \infty}$$

теорема Коши

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ $\left|\sum_{j=1}^{N} a_j - S\right| < \varepsilon/2$; $\sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \le \varepsilon/2$ ($\exists N: \forall p \in \mathbb{N}$ $|a_{N+1}| + \ldots + |a_{N+p}| < \varepsilon/2$, $p \to \infty$)

Рассмотрим новый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$: $\exists N_1$: среди $a'_1, \ldots a'_{N_1}$ содержит все $a_1, \ldots, a_N$

$\forall n \ge N_1$ $\left|\sum_{j=1}^{n} a'_j - S\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a'_j - \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n} a'_j - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right|$

Второе слагаемое:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k - S\right| < \varepsilon/2.$$

Первое слагаемое:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a'_j - \sum_{k=1}^{N} a_k\right| = |a_{j_1} + \ldots + a_{j_{n-N}}| \le, \; j_1, \ldots, j_{n-N} > N$$

$$\le |a_{j_1}| + \ldots + |a_{j_{n-N}}| \le \sum_{j=N+1}^{n} |a_j| \le \varepsilon/2. \quad \text{Откуда } \left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - S\right| < \varepsilon.$$

Для док-ва абсолютной сходимости заменим a_k на $|a_k|$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ сходится (к } A) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a'_k| \text{ сходится (к } A).$$

// перестановка сохраняет сходимость лишь для абсолютно сх-ся рядов

Последовательности с ограниченным изменением и их свойства

<u>Опр</u> Последоват-ть наз-в. послед-ть-тью с огранич. изменением, если $\{v_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}|$ сходится

<u>Теорема</u> $\{v_n\}$ монотонная и огранич. посл-ть, то $\{v_n\}$ – посл-ть с огранич. изменением.

<u>Д-во</u>. $\exists v = \lim_{n \to \infty} v_n$. $\exists v_n$ невозрастает. Тогда $\sum_{k=1}^{n} |v_k - v_{k+1}| \overset{\text{невозр}}{=}$

$= \sum_{k=1}^{k} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \ldots + v_n - v_{n+1} = v_1 - v_{n+1} \underset{n \to \infty}{\to} v_1 - v \Rightarrow$

$\Rightarrow \{v_n\}$ – посл-ть с ог. изменением

<u>Зам</u>. Сумма 2-х посл-тей с огранич. изменением является также с огранич. изменением.

$|a_k + b_k - a_{k+1} - b_{k+1}| \le |a_k - a_{k+1}| + |b_k - b_{k+1}|$.

? $\forall$ ли посл-ть явл. посл-тью с ог. изм.? Нет!

<u>Утв</u>. Если $\{v_n\}$ посл-ть с огранич. изменением $\Rightarrow \{v_n\}$ сходится

<u>Д-во</u> Критерий Коши сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}|$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n \ge N$

$\forall p$ $|v_n - v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p-1} - v_{n+p}| < \varepsilon$

Но $|v_n - v_{n+p}| = |v_n - v_{n+1} + v_{n+1} - \ldots - v_{n+p-1} + v_{n+p-1} - v_{n+p}| \le$

$\le |v_n - v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p-1} - v_{n+p}| < \varepsilon$

Но: Не всякая сходящаяся последоват-ть имеет ограниченное изменение.

Пример: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ НО: $|v_n - v_{n+1}| = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} > \frac{2}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}|$ расходится

Задача к экзамену!

Д-ть, что посл-ть является посл-тью с ограниченным изменением $\Leftrightarrow$ ее можно представить в виде разности 2-х монот огр-х посл-тей

Далее — признаки сх-ти числовых рядов.

$$\sum u_n \cdot v_n$$

Преобразование Абеля $\{V_k\}$ $u_k = V_k - V_{k-1}$, $\boxed{k \ge n+1}$ $\quad V_k = \sum_{k_1=1}^{k} u_{k_1};\ V_{k-1} = \sum_{k_1=1}^{k-1} u_{k_1}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (V_k - V_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} V_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} V_{k-1} v_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} V_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} V_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (v_k - v_{k+1}) + V_{n+p} v_{n+p} - V_n v_{n+1}$$

$$\sum u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (v_k - v_{k+1}) + V_{n+p} v_{n+p} - V_n v_{n+1}$$

13.09.08 Лекция 4

∇ (*) $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ $\quad u_k = V_k - V_{k-1}$, $k \ge n+1$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (v_k - v_{k+1}) + V_{n+p} v_{n+p} - V_n v_{n+1}}$$ преобразование Абеля

Первый признак Абеля

$\exists$ $\{S_n\}$ ограничена ($S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$), $\{v_n\}$ — посл-ть с огранич. изменением, сход. к 0. Тогда (*) сходится.

Д-во: $\exists M: |S_n| \le M\ \forall n \in \mathbb{N}$; $\forall \varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n \ge N_1, \forall p \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M}$

(условие огр-ти $\{S_n\}$) (условие посл-ти с огранич. изменением)

$\exists N_2: |v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}\ \forall n \ge N_2$; $N = \max(N_1, N_2)$, $V_n = S_n$, $V_0 = 0$

Запишем преобр-е Абеля

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p}| |v_{n+p}| + |S_n| |v_{n+1}| \le$$

$$M\left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \Rightarrow$$ ряд (*) сход. по критерию Коши

Второй признак Абеля

$\exists$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, $\{v_n\}$ — посл-ть с огранич. изменением. Тогда ряд (*) сходится.

Д-во: $\{v_n\}$ сходится, т.к. является посл-тью с огранич. изменением. $\exists\ v = \lim_{n\to\infty} \{v_n\}$.

Рассмотрим посл-ть $v_n' = v_n - v$. Это будет тоже посл-ть с ограниченным изменением, т.к. $|v_n' - v_{n+1}'| = |v_n - v_{n+1}| \Rightarrow v_n' \to 0$

Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по S_n огранич. $\Rightarrow$ в совокупности $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n'$ сх. по 1-му пр. Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n'}_{сх.} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} v u_n}_{сх.}$$

Задача к экзамену: $\exists \{v_n\}$ — посл-ть, такая, что для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n$ ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n v_n$ сходится. Д-ть, что $\{v_n\}$ — посл-ть с огранич. изменением.

Т.к. монот. и огранич. посл-ть является посл-тью с огранич. изменением.

(Следствие) **Признак Дирихле-Абеля**

Для того, чтобы ряд (*) сходился, достаточно выполнение одного из двух пар условий:

(1) $\begin{cases} \{S_n\} \text{ ограничена } (S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k) \text{ (Дирихле)} \\ v_n \text{ монот. сх-ся к } 0 \end{cases}$ $\quad$ (2) $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится (Абель)} \\ \{v_n\} \text{ монот. и ограничена} \end{cases}$

Д-во: (1) ⇒ (*) сх-ся по 1-му пр. Абеля. (2) ⇒ (*) сх-ся по 2-му признаку Абеля.

(Следствие)

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n$, p_n — невозраст., сх. к 0 посл-ть, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} p_n$ — РЯД Лейбница

Ут. **Признак Лейбница**: ряд Лейбница сходится.

Д-во: $u_n = (-1)^{n-1}$, $v_n = p_n$; $S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$. Выполнена (1) пара условия пр. Дирихле-Абеля ⇒

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ сходится, ч.т.д.}$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ сх-ся по признаку Лейбница при $p>0$.

Если $p \le 0 \Rightarrow$ ряд расх. (общ. член $\not\to 0$)

„Еще 1 ряд пополнил наш зоопарк рядов"

Тригонометр. ряды: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Пример:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$

$x \ne 2\pi k$ $\quad \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \dots + \cos(n-\frac12)x - \cos(n+\frac12)x\right)$

$\boxed{2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}$ $\quad = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac12)x\right)$

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \dots + \sin(n+\frac12)x - \sin(n-\frac12)x\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(-\sin\frac{x}{2} + \sin(n+\tfrac12)x\right)$$

$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

$\exists\ S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$, $\exists\ S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$, $|S_n^{(1)}| \le \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$; $|S_n^{(2)}| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

(I) $x \neq 2\pi k \Rightarrow$ при $p>0$ ① $\{S_n^{(1)}\}$ огранич., $\frac{1}{n^p}\searrow$, $\frac{1}{n^p}\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ сходится

(т.к. выполнена 1-я пара условий в пр. Дирихле-Абеля)

$\{S_n^{(2)}\}$ огранич., $\frac{1}{n^p}\searrow$, $\frac{1}{n^p}\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ сходится

② $p\le 0$ $(\sin nx)\cdot n^{-p}\not\to 0$, $\cos nx\cdot n^{-p}\not\to 0 \Rightarrow$ оба ряда расходятся при $p\le 0$

(II) $x = 2\pi k \Rightarrow \sin nx = 0$ $\sum\frac{\sin nx}{n^p}$ сходится $\forall p$, $\cos nx = 1 \Rightarrow \sum\frac{\cos nx}{n^p} = \sum\frac{1}{n^p}$ сх. при $p>1$.

Замечание. Для условно сх-ся рядов неприменимы признаки сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} \text{ сход.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\right)}_{b_n} \text{ расх.}$$

расходится! Но b_n не сходится!

$\frac{a_n}{b_n}\to 1$, $n\to\infty$ сход. по Лейбницу

Замечание. В признаке Лейбница монотонность существенна.

p_n $\sum_{n=1}^{\infty}p_{2n}$ сх. $\left(p_{2n}=\frac{1}{2^n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}p_{2n+1}$ расх. $\left(p_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}p_n$ расх., хотя $p_n>0$, $p_n\to 0$.

Перемножение рядов

$(*_a)$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ $(*_b)$

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & & & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{matrix} \qquad (1)$$

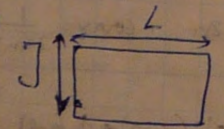
$(*_c)$ Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, содерж. все элементы (1), занумер. в некотором порядке.

Теорема. $\exists$ $(*_a)$, $(*_b)$ сходятся абсолютно к суммам S_a, S_b соответственно. Тогда $(*_c)$ сходится абсолютно, причем $\sum_{n=1}^{\infty}c_n = S_a\cdot S_b$

Д-во. 1. Покажем, что $(*_c)$ сходится абсолютно.

$\sum_{k=1}^{n}|c_k| = \sum_{k=1}^{n}|a_{j_k}|\cdot|b_{l_k}|$ ⊜, $J=\max(j_1,\dots,j_n)$, $L=\max(l_1,\dots,l_n)$

Тогда $\{a_{j_k}\cdot b_{l_k}\}$ содержится в прямоуг-ке



⊜ $\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}|a_j|\cdot|b_l| = \sum_{j=1}^{J}|a_j|\cdot\sum_{l=1}^{L}|b_l| \le$

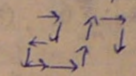
$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}|b_l|\right)$

Таким образом, част. суммы $\sum_{k=1}^{n}|c_k|$ огранич. в совокупности $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ сходится абсолютно.

2. $\sum_{k=1}^{\infty}c_k = S_a\cdot S_b$. Т.к. ряд $(*_c)$ сходится абсолютно, то его (по т. Римана) можно суммировать в $\forall$ порядке.

Суммируем „квадратиками"

$$\begin{matrix} a_1b_1 \to & a_1b_2 & \downarrow \\ a_2b_1 \leftarrow & a_2b_2 & \leftarrow \\ a_3b_1 \to & & \end{matrix}$$



Тогда

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2}c_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j\Big) \to S_a\cdot S_b$$

Т.к. абсолютн. ряд сх-ся, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \lim\limits_{n\to\infty}S_{n^2} = S_a\cdot S_b$. (пределу подпосл-ти)

Суммирование по Коши

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_ix^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1}b_jx^{j-1}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}a_ib_jx^{i+j-2} = \sum_{k=1}^{n+m+2}c_kx^k.$$

$\exists$ $b_k=0$, $k>n+1$ $\quad a_1b_k+a_2b_{k-1}+\dots+a_kb_1=c_k$

$\exists$ $a_k=0$, $k>n+1$

$\sum_{k=1}^{\infty}c_k$

$c_1=a_1b_1$

$c_2=a_1b_2+a_2b_1$

$\dots\dots$

$c_k=a_1b_k+\dots+a_kb_1$

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{matrix}$$

$\sum c_k$ – произведение по Коши рядов $\sum a_k$, $\sum b_k$

Теорема Мертенса. Если один из $(*_a)$, $(*_b)$ сходится абсолютно, а второй просто сходится (хотя бы условно), то их пр-е по Коши сход. к $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right)$

Замечание. Условие абсолютной сх-ти хотя бы 1-го из рядов отбросить нельзя.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ – сходится условно. Перемножим на себя данный ряд.

$$a_k=b_k=\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}},\ k\in\mathbb{N};\quad c_n=\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n+1-j}=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_{n+1-j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}}\frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n+1-j}} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{n+1-j}}$$

$$\alpha\cdot\beta\le\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{j}\cdot\sqrt{n+1-j}}\ge\frac{2}{(\sqrt{j})^2+(\sqrt{n+1-j})^2}=\frac{2}{j+n+1-j}=\frac{2}{n+1}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall$ слагаемое $\ge\frac{2}{n+1}$

$|c_n|=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j}\sqrt{n+1-j}}\ge\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}\not\to 0$ при $n\to\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}c_n$ расходится. Т.е. просто сходимости обоих нельзя.

Задача к экзамену: Показать, что если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_a$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_b$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=S_c$, где $\sum c_n$ – это пр-е по Коши, то $S_a\cdot S_b=S_c$.

(Если оба ряда сх. (хотя бы условно) и их пр-е по Коши)

Лекция 5

$(*_a)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(*_b)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $(*_c)\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — произведение по Коши

Теорема

Мертенса. Если один из рядов $(*_a), (*_b)$ сходится абсолютно, а другой просто сх-ся (хотя бы условно), то их произв-е по Коши сх-ся к $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. к S_a, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \to S_b$

$c_1 = a_1 b_1$

$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$\vdots$

$c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1$

$S_n^c = \sum_{k=1}^{n} c_k = a_1(b_1 + \ldots + b_n) + a_2(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(b_1 + b_2) + a_n b_1$

$\sum_{j=1}^{k} b_j = S_b + \beta_k$, $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$

$= a_1(S_b + \beta_n) + a_2(S_b + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(\beta_1 + S_b) =$

$= \underbrace{(a_1 + \ldots + a_n) S_b}_{\to S_a S_b,\ n\to\infty} + a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \ldots + a_j\beta_{n+1-j} + \ldots + a_n\beta_1$

Достаточно д-ть, что

$\lim_{n\to\infty}(a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \ldots + a_j\beta_{n+1-j} + \ldots + a_n\beta_1) = 0$

$\{a_n\}$ ограничена, т.к. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (из сх-ти ~~послед.~~ рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$)

$\{\beta_n\}$ ограничена ($S_n \to S_b$)

$\exists C: |a_n| \le C, |\beta_j| \le C, \forall n, j \in \mathbb{N}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0: \forall p \in \mathbb{N}$

$|a_{N+1}| + \ldots + |a_{N+p}| < \frac{\varepsilon}{2C}$

$n > N$: $\underbrace{a_1\beta_n + \ldots + a_N\beta_{n-N+1}}_{J_1} + \underbrace{a_{N+1}\beta_{n-N} + \ldots + a_n\beta_1}_{J_2}$

$|J_2| \le |a_{N+1}| \cdot C + \ldots + |a_n| \cdot C = C(|a_{N+1}| + \ldots + |a_n|) < \varepsilon/2$

в J_1 входит N (конечное число) слагаемых. $< \varepsilon/2C$

$|J_1| \le |C(\beta_n + \beta_{n-1} + \ldots + \beta_{n-N+1})| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\beta_n \to 0$, $\beta_{n-1} \to 0$, …, $\beta_{n-N+1} \to 0$, $n \to \infty$

при $n \ge N_2$ (оно $\exists$ из того, что $\beta_n \to 0$)

Окончат. $|J_1 + J_2| \le |J_1| + |J_2| \le \varepsilon \Rightarrow$ Теор доказана.

Бесконечные произведения

$\{p_n\}$

$\boxed{(*)\ \prod_{n=1}^{\infty} p_n}$ бесконечн. произв-я $\qquad \Pi_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$

Опр. Если $\lim_{n\to\infty} \Pi_n = \Pi \ne 0$, то $(*)$ называется сходящимся к Π, если $\nexists \lim_{n\to\infty} \Pi_n$, или $\lim_{n\to\infty} \Pi_n = 0$, то $(*)$ наз. расходящимся, или расходящимся к 0

Пример 1 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ $\qquad \Pi_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$

расходится к нулю.

Пример 2 $p_1 < p_2 < \ldots < \ldots$ посл-ть всех идущих подряд простых чисел.

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $\quad x > 1$.

$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^x}} = 1 + \frac{1}{p_j^x} + \frac{1}{p_j^{2x}} + \ldots$ $\qquad \left(1 + \left(\frac{1}{p_j}\right)\right)^{-1}$ $\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$

$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^x}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 x}} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2 x}} \cdot \ldots \cdot \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{k_n x}} =$

$= \sum_{k_1,\ldots,k_n} \frac{1}{(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n})^x} =$

$= \sum \frac{1}{m^x}$ $\quad ;$ $\quad \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j^x} \le \Pi_n \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^x}$

m: все прост. делители m содержатся среди $p_1, \ldots, p_n$ $\qquad$ Т.к. $p_n \to \infty$, $n \to \infty$

$\Pi_n \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^x}$

Если $p_n = 0$ для некоторого n, то $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$. Поэтому считаем, что $p_n \ne 0\ \forall n$

Тогда отбрасывание конечного числа членов бесконечного пр-я не влияет на сходимость.

Необходимое условие сх-ти в произведении.

Пусть $(*)$ сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$

Д-во.

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \Pi \ne 0$

$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = \frac{\Pi}{\Pi} = 1$.

Необходимое условие не является достаточным

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = 0$, хотя $\frac{n}{n+1} \to 1$.

Далее считаем, что $p_n > 0\ \forall n$

Критерий сходимости бесконечного произведения

$\prod$ $(*)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n\ (**)$. Причем если $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \Pi$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = S$, то $\Pi = e^S$.

Док-во: $\Pi_k = \prod_{n=1}^{n} p_k$, $S_n = \sum_{n=1}^{n} \ln p_k$, $\boxed{\ln \Pi_k = S_k}$ Если $\Pi_n \to \Pi \neq 0 \Rightarrow \ln \Pi_n \to \ln \Pi$
$\Rightarrow S_n \to \ln \Pi$;

Если $S_n \to S$, то $\Pi_n = e^{S_n} \to e^S \neq 0$

$\ln \Pi = \sum \ln$

$\ln(1+x) \doteq x + \bar{o}(x)$ ($\bar{o}(x) \to 0$ при $x \to 0$) [Далее $p_n = 1 + u_n$] (*) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ (**) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ (***)

Утв 1 Если $\exists n_0: p_n \geq 1,\ n > n_0$, то (**) сходится $\Leftrightarrow$ (***) $\sum_{n=1} u_n$ сходится

Док-во: $n \geq n_0$ $\ln(1+u_k) \geq 0$, $u_n \geq 0 \Rightarrow$ (**) и (***) - ряды с неотриц. членами при $n \geq n_0$.

$p_n \to 1 \Leftrightarrow u_n \to 0$

Далее $u_n \to 0$ (иначе (*) и (***) расходятся)

$\frac{x}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $0 < x < \varepsilon$, то $\exists N: \frac{u_n}{2} \leq \ln(1+u_n) \leq u_n$, $n \geq N$

По 1-му признаку сравнения (**) сходится $\Leftrightarrow$ (***) сходится;

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \bar{o}\left(\frac{x^2}{2}\right), + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$

Утв. 2 Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится, то (*) сходится, а если один из рядов расходится, то (*) расходится (а другой сходится)!

(*) $\prod_{n=1} p_n$

$u_n = p_n - 1$

Док-во: $u_n \to 0, n \to \infty$; $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \geq 0$

$\frac{x^2}{4} \leq x - \ln(1+x) \leq x^2$ $|x| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)\ u_n < \varepsilon$ и $\to$

Т.к. $u_n \to 0$ $\exists N: \frac{u_n^2}{4} \leq u_n - \ln(1+u_n) \leq u_n^2$, $n \geq N$

По 1-му признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \ln(1+u_n))$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \ln p_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$

Т.о. если $\sum u_n$, $\sum u_n^2$ сходится, то (*) сходится

Если 1-й из рядов сходится, а другой расходится, то $\Rightarrow$ (**) расходится

Пример: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$ $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, $\sum u_n$ сходится (по признаку Дирихле)

$u_n^2 = \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n}$ — расходится $\Rightarrow$

$\frac{1}{2n}$ расход., $\frac{\cos 2n}{2n}$ сходится $\Rightarrow \Pi$ расходится.

Двойные и повторные ряды

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Опр. Если $\forall m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m$ и $\sum_{m=1}^{\infty} A_m = A \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$

повторн. ряд по строкам.

Если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \beta_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = B$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = B$

повторный ряд по столбцам.

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Определение Если $\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = S$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0, N(\varepsilon) > 0:$ $\forall m \geq M(\varepsilon)\ \forall n \geq N(\varepsilon)\ |S_{mn} - S| < \varepsilon$), то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S$$

двойной ряд

Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & & \\ & 1 & -1 & & 0 & \\ & & 1 & -1 & & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & & 0 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_m = 0\ \forall m$ $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0$

$B_n = 1, B_m = 0, n > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1.$

$S_{mm} = 1$, $S_{m\,m+1} = 0$; $\Rightarrow \nexists \lim_{m,n \to \infty} S_{mn} \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ расходится

Лекция 6 20.09.08

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \end{matrix}$$

Свойство линейности

Если $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S_a$, $\sum_{m,n=1} b_{mn} = S_b$,

то $\sum_{m,n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn} + \mu b_{mn}) = \lambda S_a + \mu S_b$

(вытекает из св-в обычных - ординарн. рядов и посл-тей)

Выразим элемент м-цы через прямоуг. суммы

$S_{mn} - S_{m\,n-1} = a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn}$

$S_{m-1\,n} - S_{m-1\,n-1} = a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{m-1\,n}$ $\Rightarrow S_{mn} - S_{m\,n-1} - S_{m-1\,n} + S_{m-1\,n-1} = a_{mn}$ (i)

$S_{mn} = a_{11} + \dots + a_{1n} +$
$+ a_{m1} + \dots + a_{mn} +$

$S_{m\,n-1} = a_{11} + \dots + a_{1\,n-1} +$
$+ \dots +$
$+ a_{m1} + \dots + a_{m\,n-1}$

Необходимое условие сх-ти двойного ряда

Если $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится, то $\lim_{m,n \to \infty} a_{mn} = 0$

Д-во: $\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = S \overset{(i)}{\Rightarrow} \lim_{n,m \to \infty} a_{mn} = \underbrace{S - S - S + S}_{S_{mn}\ S_{m\,n-1}\ S_{m-1\,n}\ S_{m-1\,n-1}} = 0$

Пример 0 0 1 2 3 … n

0 0 −1 −2 −3 … $-n$

1 −1

2 −2

3 −3

$S_{mn} = 0 \Rightarrow$, $m, n \geq 2$

$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сх., но $\{a_{mn}\}$ неограничена

Теорема 1 Если двойной ряд сходится и сходятся все ряды по строкам (соотв. по столбцам), то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ (соотв. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$).

Док-во. $\forall i \ \exists \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} = A_i$ ← сх-ся все ряды по строкам (для ряда по строкам)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M(\varepsilon), N(\varepsilon): \forall m \geq M(\varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon) \ \left|\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} - S\right| < \varepsilon$ (!)

$\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$

m строк В (!) устремим $n \to \infty \Rightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{m} A_i - S\right| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq M(\varepsilon)$

Это значит, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = S$, т.е. $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S$

Двойные ряды с неотрицат. членами

Теорема 2 (Критерий сх-ти дв. ряда с неотрицат. членами) Пусть $a_{mn} \geq 0$ $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сход. $\Leftrightarrow \{S_{mn}\}$ ограничена.

Д-во:

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S \quad \exists M, N: \forall m \geq M, \forall n \geq N \quad S_{mn} \leq S + 1$

$m \leq M, n \geq N$

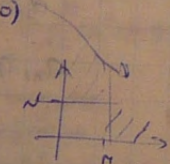
$S_{mn} \leq S_{Mn} \leq S+1$ (из того, что слагаемые $\geq$ и ряд ≥ 0)

$m \geq M, n \leq N$

$S_{mn} \leq S_{mN} \leq S+1$

$m \leq M, n \leq N$

$S_{mn} \leq S_{MN} \leq S+1$



$\Leftarrow$ $\{S_{mn}\}$ огранич. $S = \sup\limits_{m,n} S_{mn} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ S_{mn} \leq S \quad \forall m, n \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M(\varepsilon), N(\varepsilon): \ S_{MN} > S - \varepsilon \end{cases}$

(определение точной верхней грани)

$\forall m \geq M(\varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon) \quad S \geq S_{mn} \geq S_{MN} > S - \varepsilon$

$\Rightarrow S_{MN} - S \leq 0$

$S_{MN} - S > -\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{M,N\to\infty} |S_{MN} - S| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{M,N\to\infty} S_{mn} = S$ Все.

$\Rightarrow$ Для дв. рядов $\exists$ признаки сравнения

Теорема 3 (признак сравнения) Пусть $0 \leq a_{mn} \leq b_{mn}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$\sum\limits_{m,n=1} b_{mn}$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится,

$\sum\limits_{m,n}^{\infty} a_{mn}$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}$ расходится

Д-во (по предыд. утв.-ю)

Пусть $S_{mn}^{a} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$

$S_{mn}^{b} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}$

$\Rightarrow 0 \leq S_{mn}^{a} \leq S_{mn}^{b}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Если множество $\{S_{mn}^{b}\}$ ограничено, то и множество $\{S_{mn}^{a}\}$ ограничено.

Если множество $\{S_{mn}^{a}\}$ неогр. $\Rightarrow$ множество $\{S_{mn}^{b}\}$ тоже неогр.

$\Downarrow$

теор. 2

$\Downarrow$

Т. 3 доказана

Абсолютная сходимость

Опр. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ назыв. абсолют. сходящимся, если $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ — " — " — абсолютно сходящимся, если $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сх-ся

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ — " — " — абсолютно сх-ся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сх-ся.

Теорема 4 Если $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится.

$p_{mn} = \dfrac{|a_{mn}| + a_{mn}}{2}$, $q_{mn} = \dfrac{|a_{mn}| - a_{mn}}{2}$

$0 \leq p_{mn} \leq |a_{mn}|$

$0 \leq q_{mn} \leq |a_{mn}|$

$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}$, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}$ сходятся по т. 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |p_{mn} - q_{mn}| = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} - \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}$ сходится

Теорема 5 Если $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится. (аналогично и для ряда по столбцам справедливо).

Док-во:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сход. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m$ сходится и $|A_m| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\right) \geq \sum\limits_{m=1}^{\infty} |A_m| \Rightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ сх. абсолютно $\Rightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ просто сходится (как одинарный ряд)

$|A_m|$

$= \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right| \geq \left|\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right|$

$\Downarrow$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится :)

Определение $\{a_r\}$ - посл-ть **всех** элементов $\{a_{ij}\}$, занумерованных некот. способом $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ (1), называется **простым рядом**

(2) $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$; (3) $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$

Теорема 6 Если один из (1), (2), (3), (4) сходится абсолютно, то и остальные ряды сх-ся абсолютно.
При этом суммы всех четырех рядов равны.

Д-во:

I. (абсолют. сх-ть) [Достаточно рассмотреть 1 из рядов (3), (4)], например ряд (3)

(1) сх. абсолютно $\Rightarrow$ (2) сх. абсолютно.

$\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$ сход. $\quad \mathcal{G}_k = \sum_{r=1}^{k} |a_r|$

$\forall m, n \quad \mathcal{G}_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\exists R(m,n) = R_{mn}$: все элементы a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, содержащиеся все элементы $|a_1|, \ldots, |a_r| \Rightarrow \mathcal{G}_{mn} \le \mathcal{G}_{R_{mn}} \Rightarrow$ т.к. $\{\mathcal{G}_R\}$ ограничена $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{\mathcal{G}_{mn}\}$ огранич. $\Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходится.

---

(2) сх. абс. $\Rightarrow$ (1) сх. абс. $\quad \forall R \ \sum_{r=1}^{R} |a_r| \quad \exists\, m(R), n(R)$: $a_1, \ldots, a_r$ содерж. среди $\{a_{ij}\}$ $1 \le i \le m(R)$, $1 \le j \le n(R) \Rightarrow \mathcal{G}_R \le \mathcal{G}_{m(R)+n(R)} \Rightarrow$ если $\{\mathcal{G}_{mn}\}$ ограничена, то $\{\mathcal{G}_R\}$ огранич.

// **Красивое** $\mathcal{G}_{m(R)+n(R)}$ ограничено

---

(2) сх. абс. $\rightarrow$ (3) сх. абс.

$\exists C$: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le C \ \forall m, n \in \mathbb{N}$ (из абс. сх-ти (2))

При $i = m$ $\sum_{j=1}^{n} |a_{mj}| \le C \ \forall n \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_{mj}|$ сход (т.к. ч. суммы огранич.)
по Т.1, $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сход. (дв. ряд и все ряды по строкам сх.

---

(3) сх. абс. $\Rightarrow$ (2) сх. абсолютно

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\right) \le C \Rightarrow \cancel{\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \le C} \Rightarrow \forall n \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \le C \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le C \Rightarrow \{\mathcal{G}_{mn}\}$ ограничена $\Rightarrow$ дв. ряд сходится

II (равенство сумм) Покажем, что все 4 ряда сходятся к одной сумме (если сх.)

$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = S$ / т.к. $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сх. (из его абсол. сх-ти), то сход. все ряды по строкам $\Rightarrow$ по Т.1 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S$.

Рассмотрим ряд (1) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$. Т.к. (1) сходится абсолютно, то его можно суммировать $\forall$ способом.

$a_{11} \to a_{12}$
$a_{21} \leftarrow a_{22}$

Суммируем „по квадратам".
$S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \to S$

Но (1) сходится $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{n \to \infty} S_{n^2} = S$.

Лекция 7 25.09.08

$\{f_n(x)\}$, $x \in X$ **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛ-ТИ И РЯДЫ**

Опр. Если $\forall x \in X$ $\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, то $f(x)$ называется пределом функциональной посл-ти $\{f_n(x)\}$.

$\forall x \in X \ \forall \varepsilon \ge 0 : \exists N(\varepsilon, x) : \forall n \ge N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ // Это для ф последов-тей.

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$ $x \in X$, то $S(x)$ - сумма ряда.

Примечание: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сх. при $x > 1$
(т.е. Пример) $S(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)$, где $a_1, \ldots, a_n$ - непр на X (дифф., инт.), и $S(x)$ - непр (дифф., инт.)

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1, & x \ne 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Абсолютно сх-ся ряд из „хороших" (непр., дифф.) сход. к разрывн. ф-ции.

Понятие равном. сх-ти

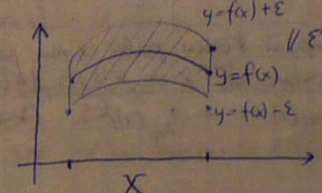
Опр. $\{f_n(x)\}$ сх-ся равномерно к $f(x)$ на X ($f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N, \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Замечание 1 Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то $\{f_n(x)\}$ сход. к $f(x)$ в $\forall$ точке множества X.
Обратное неверно (из сх-ти в $\forall$ точке не $\Rightarrow$ равномерная сх-ть)

Пример (конспр)

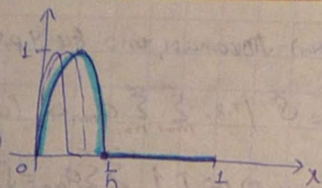
$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $x \in X$
$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$



// ε-трубочка

Пример $f_n(x)=\begin{cases}\sin \pi n x, & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}<x<1\end{cases}$



$X=[0,1]$

$x=0$ $\quad f_n(0)=0\underset{n\to\infty}{\to} 0$

// Здесь вычисляется предельная функция..

$x>0$ $\quad \exists N(x):\ x>\frac{1}{N} \Rightarrow f_n(x)=0,\ n\ge N \Rightarrow f(x)=0$

$f(x)=0$

$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$

$f_n(\frac{1}{2n})=1 \Rightarrow$ равн сх-ти нет, т.е.

$\exists \varepsilon=1\ \ \forall N\ \ \exists n=N\ \ \exists x=\frac{1}{2n}:\ |f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon$

Замечание 2

Если $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\forall\ Y\subset X$ $\ f_n(x)\underset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$

Замечание 3

$\alpha_n=\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. Тогда $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

Оп. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ назыв. равномерно сх-ся к $S(x)$ на X, если $S_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}S(x)$

(здесь $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$).

Критерий Коши равном. сходимости

$\{f_n(x)\}$ сход. равн. на множестве X $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ (только от ε!): $\forall n\ge N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in X$

(*) $\quad |f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$ (*)

Д-во $\Rightarrow$ $f_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n\ge N,\ \forall x\in X$ $\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

т.к. $\forall p\in\mathbb{N}$ $\ p+n\ge N \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f(x)|<\varepsilon/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |f_n(x)-f_{n+p}(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)-f_{n+p}(x)|\le$

$\le |f_n(x)-f(x)|+|f_{n+p}(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Leftarrow$] выполнено условие кр Коши

$\forall x\in X$ вот кр Коши сх-ти числовой пос-ти $\{f_n(x)\}\Rightarrow\forall x\in X$

$\exists\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\Rightarrow$ в (*) можно устремить $f_{n+p}\underset{p\to\infty}{\to} f \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon<2\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n\ge N,\ \forall x\in X$

$|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon\Rightarrow$ сх-ть пос-ти $\{f_n(x)\}$ равномерная, ч.т.д.

Критерий Коши равн сх-ти ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сх равномерно на мн-ве $X\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in X$

$|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon$ (**)

Д-во

$|S_n(x)-S_{n+p}(x)|\le|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)|$ и применяем критерий Коши сх-ти $\{S_n(x)\}$

Замечание 1 Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сх-ть.

Замечание 2 в (**) $p=1$ - $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n\ge N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ \ |a_{n+1}(x)|<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим необходимое условие равномерной сх-ти ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, то $a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}0$

Признаки равномерной сх-ти

Признак Вейерштрасса (сравнение со сход. числовым рядом)

] $|a_n(x)|\le u_n$ $\ \forall x\in X$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сход. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равномерно на X.

Д-во: Исп-ем критерий Коши сх-ти пос-ти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n\ge N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}<\varepsilon$

Но: $|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)|\le|a_{n+1}(x)|+\ldots+|a_{n+p}(x)|\le u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}<\varepsilon$

$\forall x\in X$ Следов., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равном. сх. по Крит. Коши.

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сх. равномерно на $[1+\delta,+\infty)$: $\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^{1+\delta}}=u_k$, $x\ge1+\delta$,

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ сход. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ сх. равномерно на $[1+\delta,\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

Задача д-ть, используя кр. Коши, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ не сх. равном. на $x>1$.

Замечание

Признак Вейерштрасса применим только к абсолютно сх-ся рядам

(т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|<\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ сходится)

Пос-ть с равномерно ограниченным изменением

Оп. $\{v_n(x)\}$ является последов-тью с равномерно огранич изменением на X, если (***) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n(x)-v_{n+1}(x)|$ сх равн. на X.

Утв. Если $\{v_n(x)\}$ — пос-ть с равномерно огранич. изменением на X, то $\{v_n(x)\}$ равномерно сходится на X.

Д-во: $|v_n(x)-v_{n+p}(x)|\le|v_n(x)-v_{n+1}(x)|+|v_{n+1}(x)-v_{n+2}(x)|+\ldots+|v_{n+p-1}(x)-v_{n+p}(x)|$

и применить кр Коши (***).

Оп. $\{f_n(x)\}$ назыв. равномерно ограниченной на мн-ве X, если $\exists M: |f_n(x)|\le M$ $\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in X$

(потому что M не зависит от x!!!)

Замечание Если $\{v_n(x)\}$ – посл-ть с равном. огранич. изменением (или равномерно сходящаяся посл-ть) $\not\Rightarrow \{v_n(x)\}$ равном. ограничена

Пример

$v_n(x) = \frac{1}{x}$; $x \in (0,1) = X$

$v_n(x) - v_{n+1}(x) \equiv 0 \Rightarrow \{v_n(x)\}$ – посл-ть с равномерно огранич. изменением, но $\lim\limits_{x \to 0+0} v_n(x) = \infty \Rightarrow \{v_n(x)\}$ не является равном. огранич.

Признаки Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x); \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ x \in X$$

Первый признак Абеля

$\exists\ \{S_n(x)\}$ равном. ограничена на X, $\{v_n(x)\}$ – посл-ть с равномерно огранич. изменением на X, $v_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x)$ сходится равномерно на X.

Лекция 8 27.09.08

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x) \qquad u_k(x) = U_k(x) - U_{k-1}(x),\ k \geq n+1$$

(ТОЖДЕСТВО АБЕЛЯ)

(ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\, v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} U_k(x)\left(v_k(x) - v_{k+1}(x)\right) + U_{n+p}(x)\, v_{n+p}(x) - U_n(x)\, v_{n+1}(x)$$

Первый признак Абеля

$\exists$ частичн. Σ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равном. огранич. на множестве X, $\{v_n(x)\}$ – последоват-ть с равном. огр. изменением по X равном. сход. к 0 на X. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x)$ равном. сход. на X.

Док-во: $\exists M : |S_n(x)| \leq M\ \forall x \in X,\ \forall n \in N$;

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1(\varepsilon),\ \forall p \in N,\ \forall x \in X \quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$\exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad |v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$\Bigg\}$ по условию

$\exists N = \max\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$, $p \in N$, $x \in X$ $\quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\, v_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1} M\, |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + M\,|v_{n+p}(x)| - M\,|v_{n+1}(x)| <$

$< \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon M}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x)$ сходится равномерно на множестве X по критерию Коши, ч.т.д.

Второй признак Абеля

$\exists\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X; $\{v_n(x)\}$ – посл-ть с равномерно ограниченным изменением ($\Rightarrow$ она будет равном. сходиться), $\{v_n(x)\}$ равном. ограничена на мн-ве X. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, v_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Д-во:

$\exists M : |v_n(x)| \leq M\ \forall n \in N,\ \forall x \in X$

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1\ \forall p \in N \quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < M$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2(\varepsilon),\ \forall p \in N \quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$\Bigg\}$ нат. условия

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равном. сходится) (если мы возьмем такие U)

$n \geq \max(N_1, N_2(\varepsilon))$, $p \in N$. В преоб-и Абеля $\quad U_n(x) = 0$, $U_k(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + u_k(x)$, $k \geq n+1$

$|U_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall k \geq n+1,\ x \in X$

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\, v_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M}\,|v_{n+p}(x)| + 0 \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x)$ сходится по Крит. Коши.

Замечание (перед признаком Дирихле-Абеля)

Если $\{v_n(x)\}$ монотонна, то $\forall n, p \in N$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| = |v_{n+1}(x) - v_{n+p+1}(x)|$$

(Если $v_n(x) \geq v_{n+1}(x) \Rightarrow \Sigma|\ \ | = \Sigma(\ \ ) \pm v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)$.

Если $v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \Rightarrow \forall n\ \Sigma|\ \ | = -\Sigma(\ \ ) = v_{n+p+1} - v_{n+1}(x)$)

Признак Дирихле-Абеля

Для равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ на X достаточно выполнения одной из 2-х пар условий:

I а) $\{S_n(x)\}$ равномерно огранич. на X $(S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x))$,

б) $\{v_k(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$, $v_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$

(То, что на занятиях называем признаком Дирихле)

II а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сх. на множестве X;

б) $\{v_n(x)\}$ монотонна $\forall x \in X$, $\{v_n(x)\}$ равномерно ограничена

(„признак Абеля. местный")

Д-во: Пусть (I) выполнено {Тогда, учитывая замечание}

$\{v_n\}$ сход. равн. на $X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$|v_{n+1}(x) - v_{n+p+1}(x)| < \varepsilon$

Но согласно замечанию, $|v_{n+1}(x) - v_{n+p+1}(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ выполнены все условия для пр. Абеля

Пусть (II) выполнено

$\exists M: |v_n(x)| \le M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$ } по условию

Пусть при $n \ge N(\varepsilon)$ $U_n(x) = 0$, $U_k(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + u_k(x) \Rightarrow |U_k(x)| < \varepsilon/3M$, $k \ge n+1$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{\varepsilon}{3M} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+p}(x)| + 0 =$

$\overset{\text{замеч.}}{=} \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)| + \frac{\varepsilon}{3M} |v_{n+p}(x)| \le \frac{\varepsilon}{3M} (|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|) \le \frac{\varepsilon}{3M} 3M = \varepsilon$

Т.о., ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ сходится равномерно по критерию Коши.

Замечание. Если $\{v_n(x)\}$ монот. по n и равном. огранич. $\Leftrightarrow \{v_n(x)\}$ – посл-ть с равном. огранич. изм по x. !!!!!

Пример 1 $\{x^n = v_n(x)\}$ $X = [0,1]$. Монотонна, равномерно ограничена.

Но $\{x^n\}$ не сходится равномерно на отрезке $[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не является посл-тью с равном. огр. изменением.

// Так... т.е. если посл-ть с равн. огр. изм. $\Rightarrow$ она сх. равномерно? ... хм... ?

Пример 2: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$, $p > 0$ Пусть $X = [\delta, 2\pi - \delta]$

$0 < \delta < \pi \quad \delta \in (0, \pi)$

Мы знаем, что $|S_n^{(1)}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \le \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$

$|S_n^{(2)}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \le \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$

$\frac{1}{n^p} \downarrow 0$, не зависит от $x \Rightarrow$ она равномерно стремится к 0 $(v_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выполнена 1-я пара условий признака Дирихле-Абеля.

Пример 3 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ сход. равномерно на $[0,1]$

Дирихле-Аб. // Вейерштрасс не проходит, т.к. мы не знаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится

Д-во: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится равномерно на $[0,1]$, $\{x^{n-1}\}$ монотонна $\forall x \in [0,1]$ и $|x^{n-1}| \le 1$

Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 1 (о предельном переходе)

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$; x_0 – предельная точка мн-ва X (может $\in$ или $\notin$ множеству X)

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = b_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$

(т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$)

Д-во 1. Сх-ть $\{b_n\}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \ge N(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (*)$

В $(*)$ $x \to x_0 \Rightarrow |b_n - b_{n+p}| \le \varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow \{b_n\}$ сходится по критерию Коши;

(переходим к пределу)

2. $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon): \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |b_n - b| < \varepsilon/3$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon): \forall n \ge N_2(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$

$|f(x) - b| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - b_n + b_n - b| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon/3} + |f_n(x) - b_n| + \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon/3} <$

$\frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - b_n|$. Т.к. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = b_n \Rightarrow \exists \mathring{U}(x_0): \forall x \in \mathring{U}(x_0)\ |f_n(x) - b_n| < \varepsilon/3$

(проколотая окр-ть)

$\Rightarrow \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - b_n| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow$ мы показали, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathring{U}_\varepsilon(x_0)$

$\forall x \in \mathring{U}(x_0)$

$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = b$, ч.т.д.

Теорема 1' (для рядов) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X (к $S(x)$ на X)

x_0 – предельная точка X, $\forall n$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} a_n(x) = \alpha_n$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} a_n(x)$

Д-во:

Применяем теорему 1 для $\{S_n(x)\}$ (посл-ти част. Σ ряда)

Лекция 9   2.10.08

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится равн. на $x > 1$ к $\zeta(x)$

$x_0 = 1$ – предельная точка $(1, +\infty)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1+0} \zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расх. противоречие

Следствие 1 $\exists\ x_0 \in X$, x_0 – предельная точка X, $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, $f_n(x)$ непрер. в точке x_0 ($x_0 \in X$) $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Д-во:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = f_n(x_0) = b_n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Следствие 1' $\exists\ x_0 \in X$, x_0 – предельная точка X, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, $a_n(x)$ непр. в точке x_0. Тогда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непр-ы в x_0

Следствие 2 Пусть X – плотное в себе множество (т.е. $\forall$ точка множества X является предельной), $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, $f_n \in C(X)$. Тогда $f \in C(X)$.

Следствие 2' $\exists\ X$ – плотное в себе, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X, $a_n \in C(X)$. Тогда $S \in C(X)$.

Замечание Условие равн. сх-ти в следствиях 2, 2' являются лишь достаточными (но не необходимыми).

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \in C(x>1)$

Д-во: $(1,\infty) = \bigcup_{\delta>0} [1+\delta, \infty)$. Докажем, что $\zeta(x) \in C([1+\delta,\infty))\ \forall \delta>0$

$\frac{1}{n^x} \in C([1+\delta,\infty))$, $\frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{1+\delta}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сход. равн. по пр. ку Вейерштрасса $\Rightarrow \zeta(x) \in C([1+\delta,\infty))$ согласно следствию 2'.

Признак Дини (для послед.) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$, причем:

1. X – компактное 2. $f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$ 3. $f \in C(X)$
4. $\forall x \in X$ $\{f_n(x)\}$ невозраст., или $\forall x \in X$ $\{f_n(x)\}$ неубыв.

Тогда $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Д-во Достаточно рассмотреть $\forall x \in X$ $\{f_n(x)\}$ невозраст.
„точечная сходимость" $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$ зафикс.

$\exists N_x(\varepsilon, x): \forall n \ge N_x \quad f_n(x) - f(x) < \varepsilon$.

$f_{N_x}(x) - f(x) < \varepsilon$, $\left(f_n(x) \le f_{N_x}(x)\right)_{n \ge N_x}$ учитываем невозр.

Непрерывность: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta \ldots$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

учитываем непрерывность

$f_{N_x}, f \in C(X) \Rightarrow$ непр. и около точки x
$\exists V_x$ – окр-ть точки x: $\forall y \in U_x$ $0 < f_{N_x}(y) - f(y) < \varepsilon$
(в силу непр-ти функции)

учитываем компактность

$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x \Rightarrow$ можно выделить конечное подпокрытие: $\exists x_1, \ldots, x_k: X \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j}$

$\exists N = \max(N_{x_1}, \ldots, N_{x_k})$
$\forall y \in X$, $\forall n \ge N$
$\exists j \in \overline{1,k}: y \in U_{x_j} \Rightarrow$ $f_n(y) - f(y) \le f_N(y) - f(y) \le f_{N_{x_j}}(y) - f(y) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall y \in X$, $\forall n \ge N$ $0 \le f_n(y) - f(y) < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ по определению;
посл-ть невозрастает

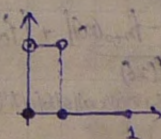
// Ты дерево. Твое место в саду.

Покажем, что каждое из условий 1–4 существенно.

// Это для кому?

Пример 1 $f(x) = x^n$, $f(x) = 0$ $X = [0,1)$
(Нарушено условие 1, 2, 3, 4 выполнены)
$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall N$ $n = N$ $x = \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = \varepsilon$

Пример 2 $X = [0,1]$ $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



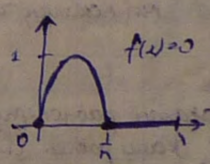
Нарушено 2,
условия 1, 3, 4 выполнены

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall N$ $n > N$ $x = \frac{1}{2n} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$

Пример 3 $X = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$,

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Равн. сх-ти нет (т.к. ее нет и на меньшем множестве $[0,1)$).
Нарушено 3 (1, 2, 4 выполнены)

Пример 4 $X = [0,1]$
$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi \cdot n x), & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



1, 2, 3 – выполнено, 4 не выполнено

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $f_n(\frac{1}{2n}) = 1 > \varepsilon$

Признак Дини для рядов $\exists\ \forall x \in X$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$, причем
1) X – компактно
2) $a_n \in C(X)$
3) $S \in C(X)$
4) $\forall x \in X$ $a_n(x) \ge 0$ или $\forall x \in X$ $a_n(x) \le 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ ряд сход. равномерно

Теорема 2 (дифференцирование) $\exists f_n(x)$ дифф-ма на $[a,b]$ (т.е. $\forall x \in (a,b)\ \exists f_n'(x)$, $\exists f_n'(a+0)$, $\exists f_n'(b-0)$) $\forall n \in \mathbb{N}$, причем $\{f_n'\}$ сход. равномерно на $[a,b]$, $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда $f_n(x)$ сх. равномерно на X к функции $f(x)$, $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in [a,b]$ ($f'(a)$ вместо $f'(a+0)$, $f'(b)$ вместо $f(b-0)$).

Док-во

1. Покажем равномерную сх-ть $\{f_n\}$ согласно кр. Коши равномерной сх-ти $\{f_n'(x)\}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geq N_1\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b]$

$$|f_n'(x) - f_{n+p}'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$ (на концах подразум. одност. пр-е)

$\{f_n(x_0)\}$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geq N_2\ \forall p \in \mathbb{N}\ |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| \leq \varepsilon/2$

$x \in [a,b]$, $n \geq \max(N_1, N_2)$, $p \in \mathbb{N}$

$\Psi(x) = f_n(x) - f_{n+p}(x)$ {применяем ф-лу Лагранжа} $\Rightarrow \Psi'(\xi)(x - x_0) = \Psi(x) - \Psi(x_0)$, $\xi \in (x, x_0)$;

непр-на

$\Psi(x_0) = f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |\underbrace{f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)}_{\Psi(x_0)}| + |\underbrace{f_n'(\xi) - f_{n+p}'(\xi)}_{\Psi'(\xi)}|\,|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

$\Psi - \Psi_0 = \Psi'(\xi)(x - x_0)$

$\Psi = \Psi_0 + \Psi'(\xi)(x - x_0) \Rightarrow |\Psi| = |\Psi_0 + \Psi'(\xi)(x-x_0)| \leq |\Psi_0| + |\Psi'(\xi)(x - x_0)|$ $\Rightarrow f_n$ сход. равн. по критерию Коши!

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\forall y \in [a,b]\ \exists g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y};\quad g(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad x \in X = [a,b] \setminus \{y\}$$

y - предельная точка X

$$\lim_{\substack{x \to y\\ x \in X}} g_n(x) = f_n'(y);\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{// это мы знаем}$$

$\Rightarrow$ если мы покажем, что $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$, то по теореме 1 о предельном переходе $\exists \lim\limits_{\substack{x \to y\\ x \in X}} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(y)$

$f'(y) = \lim\limits_{\substack{x \to y\\ x \in X}} g(x)$ // def

$f'(y)$

Итак, покажем равномерную сх-ть $\{g_n(x)\}$

Критерий Коши равном. сх-ти $f_n'(x)$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \Rightarrow |f_n'(x) - f_{n+p}'(x)| < \varepsilon$;

$$|g_n(x) - g_{n+p}(x)| = \left|\frac{f_n(x) - f_{n+p}(x) - (f_n(y) - f_{n+p}(y))}{x - y}\right| = \left|\frac{\Psi(x) - \Psi(y)}{x - y}\right| = |\Psi'(\xi)| < \varepsilon$$

{теорема Лагранжа к функции Ψ}

$|\Psi'(\xi)| = |f_n'(\xi) - f_{n+p}'(\xi)|$

ξ между x и y! $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{g_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве X по критерию Коши.

Теорема 2' Пусть $u_n(x)$ дифф-ма на $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сход. равномерно на $[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в 1-й точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, к некоторой $S(x)$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$!

4.10.08

Лекция 10

Следствие $\exists f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, причем f_n имеет первообразную на $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда f тоже имеет первообразную на отрезке $[a,b]$.

Более того, если $x_0 \in [a,b]$, Φ_n - первообр-я f_n, удовлетв. $\Phi_n(x_0) = 0$, то $\Phi_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \Phi$, где Φ - первообразная f, $\Phi(x_0) = 0$.

Д-во: $\Phi_n'(x) = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(x_0) \to 0 \Rightarrow$ по теореме 2 $\Phi_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \Phi$, $\Phi'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т.е. Φ - первообр. f, $\Phi(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x_0) = 0$

Теорема 3 (интегрируемость)

Пусть $f_n \in R[a,b]$ /* интегрир. по Риману на $[a,b]$ */, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Тогда $f \in R[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$

(т.е. $\int \lim = \lim \int$ - интеграл от предела = пределу интеграла.)

Д-во 1. Док-во интегрируемости

Покажем ограниченность f. $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ $\varepsilon = 1\ \exists N :$

$|f(x) - f_N(x)| \leq 1$, $x \in [a,b]$

$\Downarrow$

$|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)|$, $f_N(x)$ интегрируема на $[a,b]$ $\Rightarrow$ ограничена на $[a,b]$

$\Rightarrow \exists M : |f_N(x)| \leq M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M' = M + 1 : |f(x)| \leq M'\ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ можно воспользоваться критерием инт-ти в терминах сумм Дарбу.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$ - разбиение отрезка $[a,b]$: $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, $x \in [a,b] \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + f_N(x) < f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + f_N(x)$ (*)

$\forall \tau$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, $S_\tau(f) = \sum\limits_{j=1}^{k} M_j \Delta x_j$, $S_\tau(f_N) = \sum M_j^N \Delta x_j$

(разбиение $[a,b]$)

/* вспоминаем суммы Дарбу */ $s_\tau(f) = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j$, $s_\tau(f_N) = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j^N \Delta x_j$

$$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f,\quad M_j^N = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_N;\quad m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f,\quad m_j^N = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_N$$

(*) $\Rightarrow \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$ $-\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + m_j^N < f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + M_j^N$

$\Downarrow$

(**) $-\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + m_j^N \leq m_j \leq M_j \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + M_j^N$ $\forall 1 \leq j \leq k$ /* $\sum\limits_{j=1}^{k} \Delta x_j = b - a$ */

Умножаем (**) на Δx_j и суммируем

$$-\frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{k} \Delta x_j + s_\tau(f_N) \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{k} \Delta x_j + S_\tau(f)$$

$$-\frac{\varepsilon}{4} + s_\tau(f_N) \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq S_\tau(f_N) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq S_\tau(f_N) - s_\tau(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}} \quad \square$$

верно $\forall \tau$! $\exists N(\varepsilon) = \varepsilon N$

но ф-ция $f_N(x)$ интегрируема на $[a,b]$: $f_N \in R[a,b] \to \exists T$ — разбиение $[a,b]$:
по Риману

$S_T(f_N) - s_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ ⇒ при $\tau = T$ □ ⇒ $S_T(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \Rightarrow f \in R[a,b]$

2. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

$f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon)\ \forall x \in [a,b]\quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Оценим интеграл при $n \ge N(\varepsilon)$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}x\Big|_a^b = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \text{ ч.т.д.}$$

/* более общее утверждение */

То же самое для рядов:

Теорема 3' (для рядов) Пусть $u_n \in R[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ (сход. равномерно) к $S(x)$ на $[a,b]$. Тогда S инт. по Риману на $[a,b]$ ($S \in R[a,b]$), причем

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \quad (\text{т.е. } \int\sum = \sum\int).$$

Замечание: Если не вып. условие равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то $S(x)$ может быть неинтегрируемой:

Пример: $\{r_n(x)\}$ — посл-ть всех рац. чисел отрезка $[0,1]$

$u_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_n \\ 0, & x \in [0,1]\setminus r_n \end{cases}$ $\quad S(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases} = D(x)$ /* Ф-ция Дирихле */

а $D(x)$ не интегр. на $[a,b]$

Сходимость в среднем

Пусть $f_n \in R[a,b]$, $f \in R[a,b]$

Определение $\{f_n\}$ сходится в среднем к f на $[a,b]$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

f, вообще говоря, определена неоднозначно (например, можно изменить f в конечном числе точек)

Определение: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a,b]$, если $S_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a,b]$ ($S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$).

Утв. 1 Если $f_n \in R[a,b]$, $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то $\{f_n\}$ сходится в среднем к f на $[a,b]$.

Доказательство: Получим $f \in R[a,b]$.

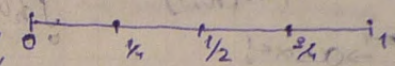
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon),\ \forall x \in [a,b]\quad |f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$

$n \ge N$ $\quad \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.$

Но обратное неверно: из сходимости в среднем на $[a,b]$ не вытекает сходимость даже в одной точке отрезка $[a,b]$

Замечание

Пример: $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [0,\frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2},1]$, $I_4 = [0,\frac{1}{4}]$, $I_5 = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $I_6 = [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, $I_7 = [\frac{3}{4},1]$,



На n-м шагу будет 2^{n-1} отрезков

$I_{2^n} = [0,\frac{1}{2^n}]$, $I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}]$, ..., $I_{2^{n+1}-1} = [1-\frac{1}{2^n},1]$ ← 2^n отрезков

$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_k \\ 0, & x \notin I_k \end{cases}$ $\quad \{\chi_k(x)\}$ расходится в $\forall$ точке $x \in [0,1]$, т.к. содержит бесконечно много нулей и единиц.

Однако $\chi_k(x)$ сходится в среднем к нулю.

$$\int_0^1 (\chi_k(x) - 0)^2 dx = |I_k| \leftarrow \text{длина } I_k \to 0,\ k \to \infty$$

// Включить в запаски примеров. Пригодится при функц. анализе!

Утв. 2 Если $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на $[a,b]$, то $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

/* $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha\cdot\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ */

$$|f_n(x) - f(x)| = \underbrace{|f_n(x) - f(x)|\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}}_{\alpha}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}_{\beta} \le |f_n(x) - f(x)|^2\frac{b-a}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Оценим разность между $\int f_n dx$ и интегралом $\int f dx$ в

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\frac{b-a}{2\varepsilon}dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx =$$

$$= \underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\frac{b-a}{2\varepsilon}dx}_{\to 0,\ < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для достаточно больших } n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для достаточно больших } n;$$

/* $\int_a^b \underset{f_n(x)-f(x)}{p(x)}\,\underset{1}{q(x)}dx \le \sqrt{\int_a^b p^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b q^2(x)dx}$ можно просто воспользоваться нер-вом Коши-Буняковского */

Утв. 3 Если $\{f_n\}$ сходится в среднем на $[a,b]$ ⇒ $\{\int_a^b f_n(x)dx\}$ огранич.

Док-во: $\alpha + \beta \le \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}$

$0 \le \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} + \beta^2 - \beta + \frac{1}{4}$

$(\alpha - \frac{1}{2})^2 \quad (\beta - \frac{1}{2})^2$

Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a,b]$

$|f_n(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + f(x)| \le (f_n(x) - f(x))^2 + f^2(x) + \frac{1}{2}$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)|dx \le \underbrace{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx}_{\to 0 \Rightarrow \text{огранич.}} + \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx}_{= const} + \frac{b-a}{2}$$

⇒ $|\int_a^b f_n(x)dx|$ ограничена

Пример

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ n^{\alpha}, & x\in(0,\frac1n]\\ 0, & x\in(\frac1n,1]\end{cases}$$

$\forall\alpha \ \forall x\in[0,1] \ f_n(x)\to 0=f(x)$

$\int_0^1 f_n dx = n^{\alpha-1}\to\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \alpha<1$

$\int_0^1 f_n^2(x)dx = n^{2\alpha-1}\to 0 \Rightarrow \alpha<\frac12$

$\alpha\in(\frac12,1]$ $\Rightarrow$ Почленно интегрировать можно, но сходимости в среднем нет.

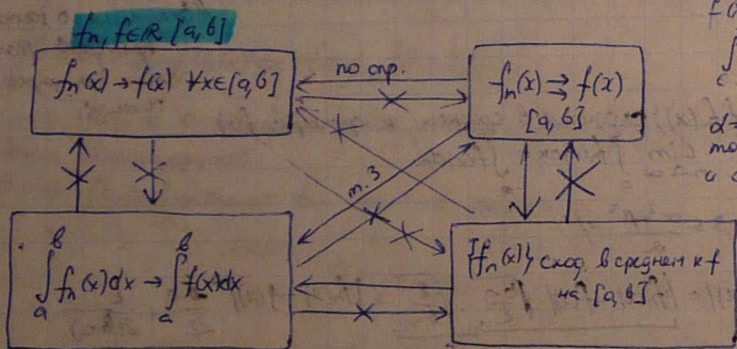
9.10.08 **Лекция 11**

$f(x)\to 0 \ \forall x\in[0,1] \ \forall\alpha$ $\qquad$ $f_n, f\in R[a,b]$

$\{f_n(x)\}$ сх. в среднем на $\alpha<\frac12$

$\int f_n(x)dx\to 1$ $\quad \alpha<1$

$\alpha=3/4$ – можно почл. инт-ть, но не сх-ся в среднем.



$f_n(x)=\chi(I_n)$,

$\int_0^1 f_n(x)dx=|I_n|\underset{n\to\infty}{\to}0$

$\alpha=2$ есть сх-ть в $\forall$ точке, нет и сх-ти в среднем

Равностепенная непрерывность и теорема Арцела

На 1 курсе, по т. Б-Вейерш., $\{a_n\}$ – огранич. числ. посл-ть $\Rightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпосл-ть.

$\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на X $\overset{?}{\Rightarrow}$ из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпосл-ть? Нет!

Пример $\{x^n\}$ $[0,1]=X$ не сходится равномерно, т.к. сходится к разрывной ф-ции $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$

$\exists\{x^{n_k}\}$ – $\forall$ подпослед-ть, тогда она сходится к разрывной функции $f(x)$, значит и сходится равномерно

Определение $\{f_n(x)\}$ называется равностеп. непр-ой на $[a,b]$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall x',x''\in[a,b]\ |x'-x''|<\delta$, $\forall n\in N$ $|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$

Замечание Если $\{f_n(x)\}$ равностеп. непрерывна на $[a,b]$, то $\forall n$ $f_n\in C[a,b]$.

Теорема Арцела Пусть $\{f_n(x)\}$ равном. огранич. и равностепенно непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\exists\{f_{n_k}(x)\}$ – равном. сх-ся на $[a,b]$

// Множество называется всюду плотным, если его замыкание совпадает с ним самим.

Доказат-во:

I. $\{x_n\}$ – всюду плотное на $[a,b]$

$\forall\delta>0\ \exists N(\delta)$: любой интервал $(\alpha,\beta)\in[a,b]$, $\beta-\alpha=\delta$ содержит одну из точек $x_1,\dots,x_N$

Процесс построения:

1 шаг $x_1=\frac{a+b}{2}$ 2 части

2 шаг $x_2=\frac{a+x_1}{2}$, $x_3=\frac{x_1+b}{2}$ 4 части

3 шаг x_4, x_5, x_6, x_7 8 частей

. . .

k-й шаг: $x_{2^{k-1}},\dots,x_{2^k-1}$ 2^k частей, длина $\frac{b-a}{2^k}$

$k: \frac{b-a}{2^k}<\delta \Rightarrow$ любой интервал длины δ содержит одну из точек $x_1,\dots,x_{2^k-1}$

$N=2^k-1$

II Строим последовательность подпосл-ти $\{f_n\}$, сход. в $\forall$ точке x_k.

x_1 $\{f_n(x_1)\}$ – числовая посл-ть $\Rightarrow$ из нее можно выделить сход. подпосл-ть (равн.огр. $\Rightarrow$ ограничена) $\exists\{f_{1n}(x_1)\}$ – подпосл-ть, сход. в x_1

$\Rightarrow f_{11}(x), f_{12}(x),\dots$ сходятся в x_1

x_2 $\{f_{1n}(x_2)\}$ – огр. числ. посл-ть $\Rightarrow\exists\{f_{2n}(x_2)\}$ сходится

$f_{21}(x), f_{22}(x),\dots$ сх. в x_2, x_1

. . .

$f_{k1}(x), f_{k2}(x),\dots, f_{kk}(x)$ сх. в $x_1,x_2,\dots,x_k$

Возьмем диагон. посл-ть (т.е. подпосл-ть) $f_{11}(x), f_{22}(x),\dots,f_{kk}(x)$ – подпосл-ть посл-ти $f_{n_j}(x)$, кот. сходится в x_j

III шаг $\{f_{kk}(x)\}$ сход. равном. на $[a,b]$ // докажем это

$g_k(x)=f_{kk}(x)$ $\quad$ $\{g_k(x)\}$ равномерно непр-на на $[a,b]$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x'': |x'-x''|<\delta, \forall k\Rightarrow|g_k(x')-g_k(x'')|<\varepsilon$

N: $\forall$ интервал длины δ содержит одну из точек $x_1,\dots,x_N$

$\boxed{\text{Замените везде } f\to g \ !}$

Крит. Коши: сх-ти $\{g_k(x)\}$ в точках $x_1,\dots,x_N$

$\exists N_1: \forall n\ge N_1, \forall p\in N \ \forall j=1,2,\dots,N\Rightarrow|f_n(x_j)-f_{n+p}(x_j)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x\in[a,b]\ \forall n\ge N_1, \forall p\in N \ \exists x_j: |x-x_j|<\delta \quad 1\le j\le N$

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\underbrace{|f_n(x)-f_n(x_j)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ (равн.-непр. степен)}}+\underbrace{|f_n(x_j)-f_{n+p}(x_j)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ по Критерию Коши}}+\underbrace{|f_{n+p}(x_j)-f_{n+p}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ (равн. непр. степен)}}$$

$\Rightarrow\{g_k(x)\}$ сходится равномерно по Критерию Коши.

Замечание Если $\{f_n(x)\}$ равностеп. непр-на на $[a,b]$ и ограничена в точке $x_0\in[a,b]$ $\Rightarrow$ она равном. ограничена на $[a,b]$.

Покажем это. Док-во:

$\varepsilon = 1 \quad \exists \delta: \forall x', x'' \quad |x'-x''|<\delta \Rightarrow |f_\ell(x')-f_\ell(x'')|<1 \quad \forall \ell$

Поделим отрезок на равные части, длина которых $<\delta$.

$a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$

$\forall x \in [a,b]$ (напр. $x > x_0$)

$y_i < \dots < y_k$ - все точки разбиения, лежащие между x_0 и x.

$|f_\ell(x) - f_\ell(x_0)| \le \underbrace{|f_\ell(x)-f(y_k)|}_{<1} + \underbrace{|f(y_k)-f(y_{k-1})|}_{<1} + \dots + \underbrace{|f(y_i)-f(x_0)|}_{<1} \le n \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \ell \quad |f_\ell(x)| \le |f_\ell(x_0)| + n \Rightarrow \exists M: |f_\ell(x_0)| < M \ \forall \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_\ell(x)| \le M+n \Rightarrow \{f_\ell(x)\}$ равн. огранич. Все. ч.т.д.

//Нужен признак равност. непрерывности!

Признак равностепенной непрерывности

Пусть $\forall n \ f_n(x)$ дифф-ма на $[a,b]$, причем $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена.
Тогда $\{f_n(x)\}$ является равност. непр.

Док-во: $\exists M > 0: \forall n, \ \forall x \in [a,b] \ |f_n'(x)| < M$;

$f_n(x') - f_n(x'') = f_n'(\xi)(x'-x'') \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \le M \cdot |x'-x''| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

По теореме Лагранжа $\xi \in [x', x'']$

$\forall n \ \forall x', x'' \in [a,b] \ |x'-x''| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta$

$\Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, ч.т.д.

Степенные ряды

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ — $\{a_n\}$ - числовая посл-ть

— СТЕПЕННОЙ РЯД $\quad a$ - число $\leftarrow$ вещест. или комплексная

Рассмотрим $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Теорема Коши-Адамара 1. Если $L=0$, то (*) сходится $\forall x \in \mathbb{R}$,
2. Если $L = \infty$, то (*) сходится лишь при $x=a$;
3. Если $0 < L < \infty$, то (*) сх. абсолютно при $|x-a| < \frac{1}{L}$,
(*) расходится при $|x-a| > \frac{1}{L}$

$\frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}}$

ф-ла Коши-Адамара

$|x-a| < R$ (*) сх.абс.

$|x-a| > R$ (*) расходится

R - радиус сходимости

11.10.08 Лекция 12

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Теорема Коши-Адамара 1. Если $L=0$, то (*) сходится (даже абсолютно) $\forall x \in \mathbb{R}$

2. $L = \infty \Rightarrow$ (*) сходится $\Leftrightarrow x = a$

3) $0 < L < \infty \Rightarrow$ (*) сходится абсолютно $|x-a| < \frac{1}{L}$, (*) расходится $|x-a| > \frac{1}{L}$.

Доказательство:

1. $L = 0 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \forall x \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||x-a|^n} = |x-a| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд (*)

сходится абсолютно $\forall x \in \mathbb{R}$ по (радикальному) признаку Коши.

$L = \infty \Rightarrow \exists \{n_k\}$: при $k \to \infty \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \infty$ (т.е. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \infty$)

$\Rightarrow \forall x \ne a \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}||x-a|^{n_k}} = \infty$

$\Rightarrow \exists K: \forall k \ge K \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}(x-a)^{n_k}|} \ge 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |a_{n_k}(x-a)^{n_k}| \ge 1 \Rightarrow$

//ряд содержит бесконечно число членов, по модулю больших единицы
$\Rightarrow$ общий член ряда (*) не стремится к 0 $\Rightarrow$ (*) расходится.

3. а) Пусть $|x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow |x-a| < \frac{1}{L+2\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon): \forall n \ge N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-a|^n} < \frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon} = q < 1 \Rightarrow$ (*) сходится по признаку Коши в непредельной форме.

б) Пусть $|x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad |x-a| > \frac{1}{L - \varepsilon \cdot 2} \Rightarrow \exists \{n_k\}: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to L \Rightarrow \exists K(\varepsilon): \forall k \ge K$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > L - \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n_k]{|a_{n_k}||x-a|^{n_k}} > \frac{L-\varepsilon}{L-2\varepsilon} > 1, \ k \ge K \Rightarrow |a_{n_k} \cdot (x-a)^{n_k}| > 1 \Rightarrow$ (*) расходится,
т.к. не выполнено необходимое условие сходимости.

т.о.

$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$
- формула Коши-Адамара

$|x-a| < R \Rightarrow$ (*) сходится абсолютно

$|x-a| > R \Rightarrow$ (*) расходится

R - радиус сходимости

Замечание 1 $a_n \ne 0, n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

(т.к. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
средние арифмет.
средние геометр.

Замечание 2 Если $x = a \pm R$, то может быть все что угодно.

В частности

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится $\Leftrightarrow |x| < 1$, т.к. $1^n \not\to 0$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ сходится $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$ ($x = 1$ - расходится)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится $\Leftrightarrow |x| \le 1$

Утв. 1

Пусть $R > 0$, R - радиус сходимости ряда (*), тогда $\forall \rho \in (0, R)$ (*) сходится равномерно на $|x-a| \le \rho$

Доказательство: $x = a + \rho$, по теореме Коши-Адамара ряд (*) сходится абсолютно в точке $a+\rho$, т.е.

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ сходится. Рассмотрим $X = [a-\rho, a+\rho] \quad \forall x \in X \quad |a_n (x-a)^n| \le |a_n| \rho^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (*) сходится равномерно на X по признаку Вейерштрасса.

Замечания

NB Степенной ряд не обязательно сходится равномерно на всем интервале сходимости!!!

Пример

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R=1$ на множестве $|x|<1$ ряд не сходится равномерно (иначе по теореме о предельном переходе $\exists \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 1-0} x^n = \sum 1$ — расходится $\nexists$))

Теорема Абеля. Пусть (*) сходится в точке x_0. Тогда (*) сходится равномерно на отрезке с концами a и x_0.

Доказательство: $x_0 \neq a$ $\quad a_n(x-a)^n = a_n\cdot(x_0-a)^n \underbrace{\left[\frac{x-a}{x_0-a}\right]^n}_{v_n(x)}$

X — отрезок с концами a и x_0.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ сходится и его члены не зависят от x $\Rightarrow$ ряд сходится равномерно на X

$x\in X \Rightarrow \frac{x-a}{x_0-a} = \alpha \in [0,1]$

$|v_n(x)| \le 1$, $v_n(x)$ невозраст. по n $\forall x$ $\Rightarrow$ (*) сходится равномерно на множестве X, т.к. (т.е. монотонны по n $\forall x$) выполнена (2) вторая пара условий признака Дирихле-Абеля.

Свойства суммы степенного ряда

Теорема 1 (непрерывность) Сумма $S(x)$ степенного ряда (*) непрерывна на $|x-a|<R$ (R — радиус сходимости (*))

Д-во $\forall x\in(a-R, a+R) \Rightarrow \exists \rho\in(0,R): x\in(a-\rho, a+\rho)$

По утверждению (*) сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho]$; все члены (*) непрерывны на $[a-\rho, a+\rho] \Rightarrow S(x)\in C[a-\rho, a+\rho] \Rightarrow S$ непрерывна в т. $x \Rightarrow S$ непрерывна на $(a-R, a+R)$

утв. после теоремы о предельном переходе

Вспомогат. лемма Пусть $\alpha_n>0, \beta_n\ge 0$

$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\beta_n = \beta$, $0\le\beta\le\infty$. Тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\beta_n = \beta$

Доказательство: 1. $\beta\neq\infty$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n > N_1 \quad \beta_n < \beta+\varepsilon$

$\exists N_2: \forall n > N_2 \quad \alpha_n < 1+\varepsilon$

Возьмем $n\ge\max\{N_1,N_2\}$ $\quad \alpha_n\cdot\beta_n < (\beta+\varepsilon)(1+\varepsilon) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\beta_n \le (\beta+\varepsilon)(1+\varepsilon)$

Т.к. $\varepsilon>0$ любое, то $\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\cdot\beta_n\le\beta$ (1) $\qquad$ (1)+(2) $\Rightarrow$?

$\exists \beta_{n_k}\to\beta$. Но $\alpha_{n_k}\to 1 \Rightarrow \beta_{n_k}\cdot\alpha_{n_k}\to\beta \Rightarrow \beta$ предельная точка $\alpha_n\cdot\beta_n$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\beta_n = \beta$

Доказат-во 2. $\beta=\infty$

$\exists \beta_{n_k}\to\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\beta_{n_k}\cdot\alpha_{n_k} = \infty \Rightarrow \infty$ — предельная точка последовательности $\alpha_n\beta_n$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\beta_n = \infty$

Теорема 2 (интегрируемость) На $(a-R, a+R)$ степенной ряд (*) можно интегрировать почленно, т.е. если $S(x)$ — сумма ряда (*), то

$$\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x a_n(t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \quad (**)$$

причем радиус сходимости (**) равен R!

Доказательство: $x\in(a-R, a+R)$ $\exists\rho\in(0,R): x\in(a-\rho, a+\rho)$ (*) сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho]$. Все члены ряда интегрируемы $\Rightarrow$ можно почленно интегрировать по отрезку с концами x и a. Найдем радиус сходимости (**).

(**) сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^n$ сходится. // умнож на const ряд (**)

$\exists$ $\beta_n = \sqrt[n]{|a_n|}$,

$\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to 1$ $\quad \left.\begin{matrix}\alpha_n>0\\ \beta_n\ge 0\end{matrix}\right| \Rightarrow$ {по вспомогат. теореме} $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$

Теорема 3 (Дифференцирование суммы степенного ряда)

$S(x)$ дифф на $(a-R, a+R)$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-a)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-a)^{n-1} \quad (***)$$

, причем радиус сходимости ряда (***) равен R.

Доказательство: Покажем, что радиус сходимости (***) равен R.

(***) сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^n$,

$\beta_n = \sqrt[n]{|a_n|}$, $\alpha_n = \sqrt[n]{n}\to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$; {по вспомогат. теореме}

Т.о., (***) сходится равномерно на $[a-\rho, a+\rho]$, $\rho\in(0,R)$, (*) сходится при $x=a$ $\Rightarrow$ (*) можно дифф-ть почленно на $[a-\rho, a+\rho]$. Т.к. $\rho\in(0,R)$ — любое, то (*), то (*) можно дифф-ть $(a-R, a+R)$ // следует из теоремы о почленном дифференцировании

// получаем, что $\sum$ степ. ряда бесконечно дифф-ма! Ура!

см. теорему 2'

Следствие 1 $S(x)\in C^\infty(a-R, a+R)$, причем $\forall k\in\mathbb{N}$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-a)^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-a)^{n-k}$$

+ применить k раз теорему 3.

Следствие 2

$a_0 = S(a)$, $\quad a_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$

подст. $x=a$

$S^{(k)}(a) = k(k-1)\ldots 1\cdot a_k = k!\,a_k$

Пример:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

R.сх. $=1$

$x=\pm 1$ $\quad \pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится $\Rightarrow$ по теореме Абеля ряд сходится равномерно $[-1,1]$ $\Rightarrow$ $\quad [-1,0]\ [0,1]$

$\Rightarrow$ сумма ряда непрерывна на $|x|\le 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $x\in[-1,1]$

Задача: разложить в степенной ряд $\operatorname{arctg}(x^{10}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{10(2n+1)}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$

$y = x^{10}$

16.10.08 Лекция 13

Разложение функций в степенные ряды

Опр. $f(x)$ разлож. в степ. ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-r,a+r)$, если существует $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = f(x)$, $x\in(a-r,a+r)$.

Замечание: можно рассматривать и [ ), ( ], [ ].

Замечание 1 Если $f(x)$ разлож. в степ. ряд, то $r \le R_{сх}$, $R_{сх}$ - радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$

Необходимое условие разложения функции в степенной ряд

Если f разлож. в степенной ряд на $(a-r,a+r)$, то $f\in C^\infty(a-r,a+r)$ ← т.к. сумма степенного ряда ∞ дифференцируема.

Единственность разложения в степенной ряд

Если $f(x)$ разлож. в степенной ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-r,a+r)$, то представление ее степенного ряда единственно.

Док-во: по следствию 2 теоремы 3 $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n=0,1,\dots$ // - опред. однозначно

Опр. Пусть $f\in C^\infty(a-r,a+r)$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ называют РЯДОМ ТЕЙЛОРА функции f с центром в точке a.

Утв. Если $f(x)$ разложима в степ. ряд по степеням $(x-a)$ на $(a-r,a+r)$, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.

Пример (Коши)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n)}(0)=\dots=0$

$x\ne0 \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{l_k}\left(\frac{1}{x}\right)$, //Покажем, что это верно!

$P_{l_k}\left(\frac1x\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_{l_k}}{x^{l_k}}$

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}$ По индукции $k\le n-1$ верно.

$k=n$ $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'=\left(e^{-\frac{1}{x^2}}P_{l_{k-1}}\left(\frac1x\right)\right)'=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_{l_{k-1}}}{x^{l_{k-1}}}\right)+$

$+e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{a_1}{x^2}-\dots-\frac{a_{l_{k-1}}}{x^{l_{k-1}+1}}l_{k-1}\right)$ // $\Rightarrow f^{(n)}(x)$ - произведение exp на многочлен

Итак $x=0$ $\lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0 \Rightarrow f(0)=\lim f(x) \Rightarrow f\in C(\mathbb{R})$

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$, $\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}=0$, ...

$\lim_{x\to0}f^{(k)}(x)=0$ $k\in\mathbb{N}$ / последоват-но $f^{(k)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k-1)}(x)-0}{x}=0$

$f^{(k-1)}(0)=0$;

Но: Если бы функция разкладывалась в степ. ряд с центром в т. 0 $\Rightarrow f(x)=f(0)+f'(0)x+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\dots = 0$

но $f(x)\ne0$ при $x\ne0$

$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $x\in\mathbb{R}$ $R_n(x)\to0$ остаток ряда Тейлора

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x\in\mathbb{R}$ $\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $x\in\mathbb{R}$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$

$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1,1]$

$|x|<1$ верно (сх.)

$x=-1$ ряд расх. / $x=1$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ сход. по признаку Лейбница.

По теореме Абеля

ряд сходится равномерно на $[0,1] \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна на $[0,1]$

Но $\ln(1+x)\in C[0,1] \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to1-0}\ln(1+x)}_{\ln 2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$ $|x|<1$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\to S_a=M\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)$

1. Линейность $M\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)=S_a$, $M\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=S_b \to \forall\alpha,\beta$ $M\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)\right)=\alpha S_a+\beta S_b$

2. Регулярность $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S \Rightarrow M\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)=S$

Метод средних арифметических (метод Чезаро (C,1) метод)

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sigma_n=\frac{S_1+\dots+S_n}{n}$

(*) сумм. (C,1) методом к S если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S$

Линейность выполнена, регулярность выполнено.

$1-1+1-1+\dots$

$S_{2n+1}=1$, $S_{2n}=0 \Rightarrow \sigma_{2n-1}=\frac{n}{2n-1}$, $\sigma_{2n}=\frac{n}{2n}=\frac12$; $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac12$

Утв. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ суммируется по Чезаро ((C,1) мет.) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

Док-во: $S_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}$, $a_n=S_n-S_{n-1}=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}-(n-1)\sigma_{n-1}+(n-2)\sigma_{n-2}$

$\frac{a_n}{n}\to S-S-S+S=0$

Метод Пуассона-Абеля

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$ (*)

Опр. Если (*) сходится при $|x|<1$ и $\lim_{x\to1-0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}\right)=S \Rightarrow S$ - сумма $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ метод П.-А.

Линейность - очевидно.

16.10.08 Лекция 12

Регулярность следует из теоремы Абеля: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (ряд$^{(*)}$ сход. при $x=1$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (*)$ сх. равн. на $[0,1] \Rightarrow$ сумма S ряда непр. на на $[0,1]$
Т.о. $\lim_{x\to 1-0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 1^{n-1} = S$

$1-1+1-1+1-1+\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} \underset{|x|<1}{=} \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1-0]{} \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k x^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (x^{k-1} - x^k) + S_{n}x^{n-1}$$

<u>Лемма</u> Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ сходится при $|x|<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1}$ сх. при $|x|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} S_k x^{k-1} - \ldots$$

$+ S_n x^{n-1}$ ($S_0 = 0$)

<u>Док-во:</u>

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} S_k (x^{k-1} - x^k) = (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} S_k x^{k-1} + S_n x^{n-1}, \text{ т.к.}$$

$\forall x \in (-1,1)\ \exists \rho:\ |x|<\rho<1$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n$ сходится $\Rightarrow \{a_n\rho^n\}$ огранич. $\Rightarrow$
($\to 0$) $\exists M:\ |a_n|\rho^n < M$ $\quad |a_n| < \frac{M}{\rho^n}$

$$|S_n| \le |a_1| + \ldots + |a_n| \le M\left(\frac{1}{\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho^n}\right) = \frac{M}{\rho^n}(1 + \ldots + \rho^{n-1}) < \frac{M}{\rho^n}\cdot\frac{1}{1-\rho}$$

$$|S_n x^{n-1}| < \frac{M}{(1-\rho)\rho}\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>Теорема Фробениуса</u> Если ряд сходится $(C,1)$ мет. к S, то ряд сходится и методом П.-А. к S.

<u>Док-во</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ $\quad \frac{a_n}{n} \to 0 \Rightarrow \exists C:\ |a_n| \le C\cdot n \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ радиус сходимости $(*) \ge 1$

$S_1 + \ldots + S_n = n\sigma_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^{n-1} \qquad S_n = n\sigma_n\ ?(1-x)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Big| \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - S = (1-x)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - S)x^{n-1}\right) \ominus$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^{n-1} \qquad S\cdot 1 = S(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$\sigma_n \to S \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n \ge N\ \ |\sigma_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\ominus\ \underbrace{(1-x)^2\left(\sum_{n=1}^{N}\ldots\right)}_{1} + \underbrace{(1-x)^2\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\ldots\right)}_{2}$$

$$\underbrace{}_{2} \le (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n\cdot\frac{\varepsilon}{2}x^{n-1} \le \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2\sum_{1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{}_{1} = (1-x)^2\left(\sum_{n=1}^{N} n(\sigma_n - S)x^{n-1}\right) \to 0 \text{ при } x\to 1-0 \qquad \forall x\in(0,1)$$

$0,\ x\to 1-0 \qquad \sum_{n=1}^{N} n(\sigma_n - S)$

$\Rightarrow \exists \delta:\ \forall x\in(1-\delta,1)\ \left|\underbrace{}_{1}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \qquad \forall x\in(1-\delta,1)$
$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Лекция 14 18.10.08

Из сходимости методом П.-А. $\not\Rightarrow$ сходимость методом $[C,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n \qquad \frac{a_n}{n} \not\to 0 \Rightarrow$ ряд расходится $[C,1)$ методом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}x^{n-1} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} = \frac{1}{(1-(-x))^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1-0]{} \frac{1}{4}$$

Кратные интегралы

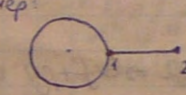
Множ-во $A \subset \mathbb{R}^n$ т. $P\in A$ называется внутренней точкой множ-ва A, если $\exists$ окр-ть точки P (открытый шар с центром в т. P), целиком содерж. в A.

Совокупность всех внутренних точек множества A обозначается $\operatorname{int} A$

$P \in \overline{A}$ — замыкание множ-ва A, если в $\forall$ окрестности точки P (в любом открытом шаре с центром в точке P) лежат точки из множества A.

$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$ — граница множества A.

Граница: Пример:



$A = \{x^2+y^2<1\} \cup [1,2]$
$\operatorname{int} A = \{x^2+y^2<1\}$
$\overline{A} = \{x^2+y^2\le 1\}\cup[1,2]$
$\partial A = \{x^2+y^2=1\}\cup[1,2]$

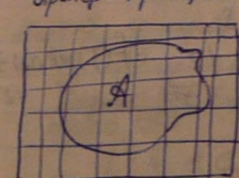
$\exists A$ — измеримое (= квадрируемое) множество в $\mathbb{R}^2$ (это значит, что A ограничено $\forall \varepsilon>0\ \exists \Phi_\varepsilon$ — <u>элементарная фигура</u> (объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, $\parallel$-ми осям координат): $\mu(\Phi_\varepsilon)<\varepsilon$, $\partial A \subset \Phi_\varepsilon$

A — ограниченное измеримое множество

Разбиение множества A $\underline{\underline{T}}$: $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, A_j измеримо, $\operatorname{int} A_i \cap \operatorname{int} A_j = \varnothing$, $i\ne j$, $1\le i,j\le n$

Диаметр A_j: $\operatorname{diam} A_j = \sup_{P,Q\in A_j} \rho(P,Q) \qquad d_T = \max_{1\le j\le n} \operatorname{diam} A_j$

Пример: прямоугольное разбиение.



$A\subset[a,b]\times[c,d]$
$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$
$c \le y_0 < y_1 < \ldots < y_l = d$
$R_{ij} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$

$A_{ij} = A\cap R_{ij}$ — измеримо, без общих внутр. точек $\quad T:\ A = \bigcup A_{ij}$, $1\le i\le k$, $1\le j\le l$

$$d_T \le \max_{i,j}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}$$

16.10.08 Лекция 12

Пусть функция f определена на множестве $\mathcal{A}$; T $P_j \in \mathcal{A}_j$, $1 \le j \le n$

<u>Опр</u> $\sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) = \sum_{j=1}^{n} f(P_j) \cdot \mu(\mathcal{A}_j)$ – интегральная сумма

f называется **интегрируемой** на множ-ве $\mathcal{A}$ (<u>по</u> множ-ву $\mathcal{A}$), если $\exists I$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta, \forall P_1, \dots, P_n$, где $P_j \in \mathcal{A}_j$ – $|\sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) - I| < \varepsilon$.

$$I = \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{или} \quad I = \int_A f\,d\mu$$

<u>Замечание 1</u> Если $\mu(\mathcal{A}) = 0$, то любая f, определённая на $\mathcal{A}$, является интегрируемой на $\mathcal{A}$, $\int f d\mu = 0$

<u>Доказат-во</u>: $\sigma_T(f, P_1, \dots P_n) \overset{A}{=} 0 \ \forall T, \forall P_1, \dots, P_n$. :)

<u>Замечание 2</u>
Если $f = C$ – постоянная, то f интегр. на $\mathcal{A}$, $\int_{\mathcal{A}} C d\mu = C$

<u>Док-во</u>: $\sigma_T(C, P_1, \dots, P_n) = C \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathcal{A}_j) = C\mu(\mathcal{A})$, ч.т.д.

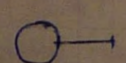
$\Downarrow$

Справедливо <u>свойство линейности.</u>

<u>Замечание 3</u>. Если f, g интегрируемы на $\mathcal{A}$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$ интегрируема на $\mathcal{A}$, причем $\int_{\mathcal{A}} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\mathcal{A}} f d\mu + \beta \int_{\mathcal{A}} g d\mu$.

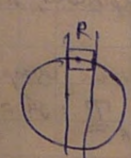
<u>Док-во</u>:
$$\sigma_T(\alpha f + \beta g, P_1, \dots, P_n) = \alpha \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) + \beta \sigma_T(g, P_1, \dots, P_n) \to \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

<u>Замечание 4</u> Если f интегр. на $\mathcal{A}$ $\not\Rightarrow$ f ограничена на $\mathcal{A}$



$f(x,y) = 0$, $x^2 + y^2 < 1$
$f(x,y) = \frac{1}{x-2} + 1$ $x \in [1, 2]$
$f(x,y) = 0$, $x = 2$, $y = 0$

<u>Утв-е</u> (без доказат-ва)
если $\mathcal{A} \subset \overline{\operatorname{int} \mathcal{A}}$, то
f интегр. на $A \Rightarrow f$ огранич. на A.
<u>Док-во</u>:
$P_n \to p \in \overline{\operatorname{int} A}$
$f(P_n) \to \infty$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ $\operatorname{diam}(R) < \delta$



$\mu(R \cap A) > 0$ $|\underbrace{\Sigma \dots}_{\text{огр.}} + \underbrace{f(\xi)}_{\infty}\mu(R \cap A) - I| < \varepsilon$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

f – огранич., определена на $\mathcal{A}$, T: $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j$

$M_j = \sup_{\mathcal{A}_j} f$, $m_j = \inf_{\mathcal{A}_j} f$

$$S_T(f) = \sum_{j=1}^{n} M_j \mu(\mathcal{A}_j), \quad s_T(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j \mu(\mathcal{A}_j)$$

верхняя сумма Дарбу — нижняя сумма Дарбу

$m_j \le f(P_j) \le M_j$, $P_j \in \mathcal{A}_j$

$\Downarrow$

(1) $s_T(f) \le \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) \le S_T(f)$ $\forall P_j \in \mathcal{A}_j$, $1 \le j \le n$

(2) $S_T(f) = \sup_{\substack{P_j \in \mathcal{A}_j \\ 1 \le j \le n}} \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n)$, $s_T(f) = \inf_{\substack{P_j \in \mathcal{A}_j \\ 1 \le j \le n}} \sigma(f, P_1, \dots, P_n)$

Пусть есть 2 разбиения:
$T_1: \mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n_1} \mathcal{A}_j^{(1)}$, $T_2: \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{n_2} \mathcal{A}_k^{(2)}$

$T_1 \wedge T_2$: $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{n_1} \bigcup_{k=1}^{n_2} \underbrace{(\mathcal{A}_j^{(1)} \cap \mathcal{A}_k^{(2)})}_{\mathcal{A}_{jk}}$

В частности, если T_1 и T_2 – прямоугольные разбиения, то $T_1 \wedge T_2$ – прямоугольное разбиение.
(пересечение прямоугольников есть прямоугольник)

(3) $S_{T_1 \wedge T_2} \le S_{T_1}$, $s_{T_1 \wedge T_2} \ge s_{T_2}$

<u>Доказат-во</u>: $M_{jk} = \sup_{\mathcal{A}_j^{(1)} \cap \mathcal{A}_k^{(2)}} f \le \sup_{\mathcal{A}_j^{(1)}} f = M_j^{(1)}$ $S_{T_1 \wedge T_2}(f) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \underbrace{M_{jk}}_{\le M_j^{(1)}} \mu(\mathcal{A}_j^{(1)} \cap \mathcal{A}_k^{(2)}) \le$
$\le \sum_{j=1}^{n_1} M_j^{(1)} \sum_{k=1}^{n_2} \mu(\mathcal{A}_j^{(1)} \cap \mathcal{A}_k^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n_1} M_j^{(1)} \mu(\mathcal{A}_j^{(1)} \cap (\bigcup_{k=1}^{n_2} \mathcal{A}_k^{(2)})) = \sum_{j=1}^{n_1} M_j^{(1)} \mu(\mathcal{A}_j^{(1)}) = S_{T_1}(f)$

(4) $\forall T_1, T_2$ $s_{T_2}(f) \le S_{T_1}(f)$, т.к. (используя 3)
$$s_{T_2}(f) \le s_{T_1 \wedge T_2} \overset{(1)}{\le} S_{T_1 \wedge T_2}(f) \overset{(3)}{\le} S_{T_1}(f)$$

(5) Множество $\{S_T(f)\}$ ограничено снизу любой $s_{T_2}(f)$
множество $\{s_T(f)\}$ ограничено сверху любой $S_{T_1}(f)$ $\Rightarrow$ $I^* = \inf_T S_T(f)$, $I_* = \sup_T s_T(f)$

$\Rightarrow$ (6) $I_* \le I^*$ (Покажем это)
в (4) берем $\inf_{T_1} S_{T_1}(f) \Rightarrow \forall T_2$ $s_{T_2} \le I^*$, берем $\inf_{T_2} s_{T_2}(f) \Rightarrow I_* \le I^*$

Первый критерий интегрируемости ограниченной функции:

f интегр. на $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0: \forall T$ с $d_T < \delta$ $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

<u>Доказат-во</u>: f интегр. на $\mathcal{A} \to \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0: \forall T: d_T < \delta, \forall P_1, \dots, P_n, P_j \in \mathcal{A}$
<u>Необх-ть</u> ($\Rightarrow$)
$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$
из (2) $S_T(f) = \sup_{P_1, \dots, P_n;\, P_j \in \mathcal{A}_j} \sigma_T(f, P_1, \dots, P_n) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$, опре супремума
$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_T(f) \Rightarrow$ $S_T(f) - s_T(f) \le (I + \frac{\varepsilon}{3}) - (I - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

<u>Дост-ть</u> ($\Leftarrow$)
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall T$ с $d_T < \delta$ $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

16.10.08

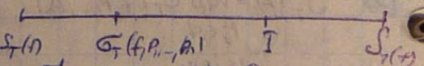
$s_T(f) \le I_* \le I^* \le S_T(f)$ $\forall T$

$\Downarrow$

$I^* = I_* = I$. Покажем, что $\int_A f\,d\mu = I$

$\forall P_1,\dots,P_n$ $s_T(f) \le \sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) \le S_T(f)$

$s_T(f) \le I \le S_T(f)$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow |\sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) - I| \le S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall T\ d_T<\delta \Rightarrow |\sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) - I| < \varepsilon$ (3)

$\Rightarrow$ f инт., $\int_A f\,d\mu = I$!

Следствие. Если f интегр. на A, то $I^* = I_* = \int_A f\,d\mu$.

Второй критерий инт-ти: f интегр. на $A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists T:\ S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$.
Необх-ть следует из 1-го критерия инт-ти.

23.10.08 Лекция 15

NB! Это — 2-я часть лекции :)

Третий критерий инт-ти

f инт-ма на $A \Leftrightarrow I^* = I_*$. При этом $I = I^* = I_* = \int_A f\,d\mu$

Док-во: $\Rightarrow$ следствие из 1го критерия инт-ти.

$\Leftarrow$ $I_* = I^* \overset{def}{=} I$

$\exists T_1, T_2$ — разбиения A: $S_{T_2} < I^* + \varepsilon$, $s_{T_1} > I_* - \varepsilon$

$I - \varepsilon < s_{T_1}(f) \le s_{T_1\cap T_2}(f) \le S_{T_1\cap T_2}(f) \le S_{T_2}(f) < I + \varepsilon$; $S_{T_1\cap T_2} - s_{T_1\cap T_2} < 2\varepsilon \Rightarrow f$ инт-ма по 2-му критерию инт-ти, $I = I_* = I^*$

Опр. f инт-ма на A в смысле прямоугольных разбиений, если $\exists I_{пр}: \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0: \forall T_{пр}: A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ — прямоуг. разбиение A, $d_{T_{пр}} < \delta$, $\forall P_1\in A_1,\dots,P_n\in A_n$

$|\sigma_{T_{пр}}(f,P_1,\dots,P_n) - I_{пр}| < \varepsilon$

Утв. Ограниченная функция f инт-ма на $A \Leftrightarrow f$ инт-ма в смысле прямоуг. разбиений. При этом $I_{пр} = \int_A f\,d\mu$.

Док-во $\Rightarrow$ f инт-ма $\Rightarrow |\sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) - \int_A f\,d\mu| < \varepsilon$ $\forall T: d_T < \delta$, в том числе и для $T_{пр} \Rightarrow I_{пр} = \int_A f\,d\mu$.

$\Leftarrow$ f инт-ма в смысле прямоуг разбиений $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists T_{пр}: |\sigma_{T_{пр}}(f,P_1,\dots,P_n) - I_{пр}| < \varepsilon$, $S_{T_{пр}} = \sup_{(P_1,\dots,P_n)} \sigma_{T_{пр}}(f,P_1,\dots,P_n)$

$s_{T_{пр}} = \inf_{(P_1,\dots,P_n)} \sigma_{T_{пр}}(f,P_1,\dots,P_n)$

ну это же очевидно :))

$\Rightarrow I_{пр} - \varepsilon \le s_{T_{пр}} \le S_{T_{пр}} \le I_{пр} + \varepsilon \Rightarrow S_{T_{пр}}(f) - s_{T_{пр}}(f) \le 2\varepsilon < 3\varepsilon \Rightarrow f$ инт-ма по 2-му крит. инт-ти.

Достаточные условия инт-ти

Теорема. Пусть A — замкнутое измеримое мн-во, $f \in C(A) \Rightarrow f$ инт-ма на A

Док-во: Если $\mu(A) = 0 \Rightarrow f$ инт-ма на A :)

Если $\mu(A) \ne 0 \Rightarrow f$ равном. непр-на на A, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall P, Q$:

$\rho(P,Q) < \delta$ $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon/2\mu(A)$; $\forall T: d_T < \delta$ $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$

$\forall P, Q \in A_j$ $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon/2\mu(A)$

$M_j - m_j \le \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}$ ($M_j = \sup$, $m_j = \inf$ в смысле: $M_j = \sup_{x\in A_j} f(x)$, $m_j = \inf_{x\in A_j} f(x)$)

$S_T(f) - s_T(f) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)\mu(A_j) \le \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(A_j)}_{\mu(A)} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f$ инт-ма по 1-му критерию инт-ти

Теорема. A — замкнутое измеримое множество, f огранич. на A, $\exists B\subset A: \mu(B) = 0$, $f \in C(A\setminus B) \Rightarrow f$ инт-ма на A.

Док-во: $\exists L: |f| < L$ на A

$\exists \Phi: B \subset \Phi$, $\mu(\Phi) < \varepsilon/4L$ $\forall\varepsilon>0$ $B \subset \operatorname{int}\Phi$

$A = (A\setminus \operatorname{int}\Phi) \cup (A \cap \operatorname{int}\Phi)$

$A\setminus\operatorname{int}\Phi$ — измеримо, замкнутое, $f\in C(A\setminus\operatorname{int}\Phi) \Rightarrow f$ инт-ма на $A\setminus\operatorname{int}\Phi$;

$\exists T: A\setminus\operatorname{int}\Phi = \bigcup_{j=1}^n A_j$, $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon/2$

$A_{n+1} = A\cap\operatorname{int}\Phi$

$T = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$ $S_T(f) - s_T(f) = S_T(f) - s_T(f) + (\underbrace{\sup_{A_{n+1}} f}_{\le L} - \underbrace{\inf_{A_{n+1}} f}_{\ge -L})\underbrace{\mu(A_{n+1})}_{\le \mu(\Phi)} < \frac{\varepsilon}{2} + 2L\cdot\frac{\varepsilon}{4L} = \varepsilon$

1 часть лекции

5) Множество $\{S_T(f)\}$ ограничено снизу $\forall s_{T_2}(f) \Rightarrow I^* = \inf_T S_T(f)$

Множество $\{s_T(f)\}$ ограничено сверху $\forall S_{T_1}(f) \Rightarrow I_* = \sup_T s_T(f)$

(6) $I_* \le I^*$

В (4) $\inf_{T_1} S_{T_1}(f) \Rightarrow \forall T_2$ $s_{T_2}(f) \le I^*$

берем $\inf_{T_2} S_{T_2}(f)$ $I_* \le I^*$

Первый критерий инт-ти огранич. функции

f интегр. на $A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall T: d_T < \delta$ $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Док-во $\Rightarrow$ f инт-ма на $A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall T: d_T < \delta$

(Необх.) $\forall P_1,\dots,P_n$ $P_j \in A_j$

$I - \varepsilon/3 < \sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) < I + \varepsilon/3$. Из (2) $S_T(f) = \sup_{P_1,\dots,P_n,\ P_j\in A_j} \sigma_T(f,P_1,\dots,P_n) \le I + \varepsilon/3$

$S_T - s_T \le (I + \frac{\varepsilon}{3}) - (I - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$\Leftarrow$ (Достаточн.) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall T: d_T < \delta$ $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

$s_T \le I_* \le I^* \le S_T$ $\forall T \Rightarrow I_* = I^* = I$

Покажем $\int_A f\,d\mu = I$

$\forall P_1,\dots,P_n \quad s_T \le \sigma_T(f, P_1,\dots,P_n) \le S_T \Rightarrow |\sigma_T(f, P_1,\dots,P_n) - I| \le S_T - s_T < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow s_T(f) \le I \le S_T$

$\Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{A}} f d\mu = I$

Следствие. Если f инт-ма на $\mathcal{A}$, то $I^* = I_* = \iint\limits_{\mathcal{A}} f d\mu$;

Второй критерий инт-ти огранич. функции

f инт-ма на $\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists T: S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Док-во: ($\Rightarrow$) очевидно из 1-го критерия

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T^*: \mathcal{A} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j^* \qquad S_{T^*}(f) - s_{T^*}(f) < \varepsilon/2$

$\exists L: |f| < L$ на $\mathcal{A}$

$\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \partial\mathcal{A}_j^*$, Γ замкнуто; $\mu(\Gamma) = 0$

$\exists \Phi$ – элемент. фигура $\Gamma \subset \mathrm{int}\,\Phi$, $\mu(\Phi) < \varepsilon/4L$

(Если $\Gamma \subset \Phi$, но Γ , то каждый прямоуг-к Φ „немного раздуем" отн-но центра)

$\partial\Phi$ – замкнутое мн-во; $\Gamma \cap \partial\Phi = \emptyset$

$\exists \delta > 0 \ \forall P_1 \in \Gamma, P_2 \in \partial\Phi \quad \rho(P_1, P_2) > \delta$

Покажем, что $\forall T \ \mathcal{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \mathcal{A}_k \quad d_T \le \delta \quad S_T - s_T(f) < \varepsilon$ (тогда f интегр-ма согласно 1-му кр. инт-ти)

$\{1 \dots l\} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$

$k \in \mathcal{I}_1$, если $\exists \mathcal{A}_j^*: \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j^*$

$k \in \mathcal{I}_2$, если $\nexists j \in \{1,\dots,n\}: \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_j^*$

Покажем, что если $k \in \mathcal{I}_2$, то $\mathcal{A}_k \subset \Phi$. $k \in \mathcal{I}_2$; $\forall P \in \mathcal{A} \ \exists j: P \in \mathcal{A}_j^*$.

Т.к. $\mathcal{A}_k \not\subset \mathcal{A}_j^*$, $\exists Q: Q \notin \mathcal{A}_j^*$, $Q \in \mathcal{A}_k \quad [PQ] \cap \partial\mathcal{A}_j^* \ne \emptyset$,

$\xi \in [PQ] \cap \partial\mathcal{A}_j^*$, $\xi \in \Gamma$

$\rho(P, \xi) \le \rho(P, Q) < \delta$, т.к. $d_k < \delta$ но $\rho(\xi, \partial\Phi) > \delta \Rightarrow P \in \mathrm{int}\,\Phi \Rightarrow \mathcal{A}_k \subset \Phi$

$M_k = \sup\limits_{\mathcal{A}_k}(f), \quad m_k = \inf\limits_{\mathcal{A}_k}(f), \quad M_j^* = \sup\limits_{\mathcal{A}_j^*}(f), \quad m_j^* = \inf\limits_{\mathcal{A}_j^*}(f)$

$S_T(f) - s_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{l} (M_k - m_k)\mu\mathcal{A}_k = \sum\limits_{k \in \mathcal{I}_1} (M_k - m_k)\mu(\mathcal{A}_k) + \sum\limits_{k \in \mathcal{I}_2} (M_k - m_k)\mu(\mathcal{A}_k)$

$\sum\limits_{k \in \mathcal{I}_2} (M_k - m_k)\mu(\mathcal{A}_k) \le 2L \sum\limits_{k \in \mathcal{I}_2} \mu(\mathcal{A}_k) \le 2L\mu(\Phi) \le \varepsilon/2$

$\sum\limits_{k \in \mathcal{I}_1} (M_k - m_k)\mu(\mathcal{A}_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k: \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}_j^*} (\underset{M_j^*}{M_k} - \underset{m_j^*}{m_k})\mu(\mathcal{A}_k) \le \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j^* - m_j^*) \sum\limits_{k: \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}_j^*} \mu(\mathcal{A}_k) \le \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j^* - m_j^*)\mu(\mathcal{A}_j^*) =$

$= S_{T^*}(f) - s_{T^*}(f) < \varepsilon/2 \Rightarrow S_T(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Все :)

Далее смотри 2-ю часть лекции в её начале :)

БГГ.

Лекция 16 — 25.10.08

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА (без доказательства)

f – огранич. функция

1. Аддитивность. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$; $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ измеримы, $\mathrm{int}\,\mathcal{A}_1 \cap \mathrm{int}\,\mathcal{A}_2 = \emptyset$. Тогда f интегр. на $\mathcal{A} \Leftrightarrow f$ интегр. на $\mathcal{A}_1$ и на $\mathcal{A}_2$. При этом

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A}_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{A}_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

2. Если $\mathcal{A}$ измеримо, $B \subset \mathcal{A}$, B измеримое, то f интегр. на $\mathcal{A} \Rightarrow f$ интегр. на B.

3. Если $\mathcal{A}$ измер., $B \subset \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$, f интегр. на $\mathcal{A}$, то $\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{A} \setminus B} f(x,y)\,dx\,dy$

4. f интегр. на $\mathcal{A} \Rightarrow |f|$ интегр. на $\mathcal{A}$, причем

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint\limits_{\mathcal{A}} |f(x,y)|\,dx\,dy$$

5. f, g интегр. на $\mathcal{A} \Rightarrow f \cdot g$ интегр. на $\mathcal{A}$.

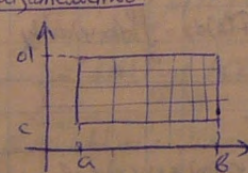
6. f, g интегр. на $\mathcal{A}$ и $f(x,y) \le g(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{A} \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)\,dx\,dy$

СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Теорема 1. Пусть $R = [a,b] \times [c,d]$, f интегр. на R и $\forall x \in [a,b]$ $\exists \Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Тогда $\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx = \iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$, т.е.

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)$$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall T$-разбиения $\mathcal{A}$ $d_T < \delta \quad S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$



$\tau_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\tau_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_{l-1} < y_l = d$

$T: \ R = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{l} R_{ij} \qquad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

Если $d_{\tau_x} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $d_{\tau_y} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \Rightarrow d_T < \delta$; $M_{ij} = \sup\limits_{R_{ij}} f$, $m_{ij} = \inf\limits_{R_{ij}} f$

$S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{l} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$; $s_T = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad 1 \le i \le n \qquad y \in [y_{j-1}, y_j]$

$m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij} \quad (1)$ интегр. по $[y_{j-1}, y_j]$

$m_{ij} \cdot \Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \le M_{ij} \cdot \Delta y_j$ – просумм. по $1 \le j \le l$

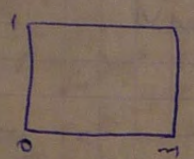
$\sum_{j=1}^{\ell} m_{ij}\Delta y_j \le \int_c^d f(\xi_i,y)dy = \Phi(\xi_i) \le \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij}\Delta y_j$ | умнож. на Δx_i и суммир. по $1\le i\le n$

$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^\ell m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \le \sum_{i=1}^n \Phi(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^\ell M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \Rightarrow s_\tau(f) \le \sigma_{\tau_x}(\Phi,\xi_1,\dots,\xi_n)\le S_\tau(f)$

$s_\tau(f)\le I_* = I^* = \iint_R f(x,y)\,dxdy \le S_\tau(f) \Rightarrow \left|\sigma_{\tau_x}(\Phi,\xi_1,\dots,\xi_n) - \iint_R f(x,y)\right| \le S_\tau(f)-s_\tau(f) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \int_a^b \Phi(x)dx = \iint_R f(x,y)dxdy$

Замечание: Если f интегр. на $R \not\Rightarrow \forall x\ \exists \int_a^b f(x,y)dx$



$R=[0,1]\times[0,1]$

$f(x,y) = \begin{cases}0, & x\in(0,1],\ y\in[0,1]\\ D(y), & x=0,\ y\in[0,1]\end{cases}$

функция Дирихле

f интегр. на R, т.к. f огранич. и множество точек разрыва имеет меру 0, но $\nexists \int_a^b f(0,y)dy$

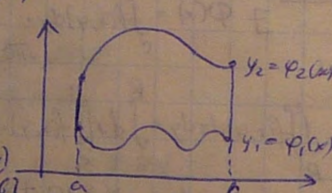
$R = \overline{\operatorname{int} R}$ $\quad([a,b]\times[c,d] = \overline{(a,b)\times(c,d)})$.

f интегр. на $R \Rightarrow f$ ограничено на R.

Теорема 1'. Если f интегрируема в $[a,b]$ и $\forall y\in[c,d]$ $\exists \int_a^b f(x,y)dx = \Psi(y)$, то $\int_c^d \Psi(y)dy = \iint_R f(x,y)dxdy$, т.е.

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Теорема 2. Пусть $A = \{a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $x\in[a,b]$



A измеримо, f огранич. на A и интегр. на A.

Если $\forall x\in[a,b]\ \exists\ \Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, то $\int_a^b\Phi(x)dx = \iint_A f(x,y)dxdy$

Замечание. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b] \Rightarrow A$ измеримо

f интегр. на $A \overset{?}{\Rightarrow} f$ огранич. на A, т.к. $A\subset \overline{\operatorname{int}A}$

Доказательство: A измеримо $\Rightarrow A$ ограничено $\Rightarrow \exists c,d:\ c\le\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\le d$, $x\in[a,b]$

$R=[a,b]\times[c,d]$ $\quad F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in A\\ 0, & (x,y)\in R\setminus A\end{cases}$

$F(x,y)$ интегр. на R по свойству аддитивности, т.к. f интегр. на A, $F=0$ интегр. на $R\setminus A$ и $\iint_R F(x,y)dxdy = \iint_A \overset{=f(x,y)}{F(x,y)}dxdy + \iint_{R\setminus A} =$

$= \iint_A f(x,y)dxdy$

$\forall x\in[a,b]\ \exists \int_c^d dy\, F(x,y) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \Phi(x) \Rightarrow$ по теореме 1.

$\iint_R F(x,y)dxdy \overset{T.1}{=} \int_a^b dx\int_c^d F(x,y)dy$

$\|$

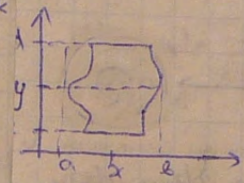
$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \Phi(x)dx$

Теорема 2'. Пусть $A=\{c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, $y\in[c,d]$

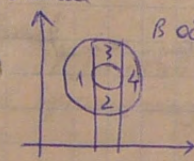
A измеримо, f огранич. на A и интегр. на A

Если $\forall y\in[c,d]\ \exists\ \Psi(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, то

$$\int_c^d\Psi(y)dy = \iint_A f(x,y)dxdy$$



Замечание



В общем случае множество можно разбить на части и применить Т2, Т2'.

n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ($n\ge3$)

$A\subset\mathbb{R}^n$

$I_k \in\{[a_k,b_k],\ (a_k,b_k),\ [a_k,b_k),\ (a_k,b_k]\}$ $\quad 1\le k\le n$

// Математик при выходе из театра:
– Я думал, он камерный, а он обычный, прямоуг-ный.

$\Pi = I_1\times I_2\times\dots\times I_n$ – прямоуг. параллелепипед

$\mu(\Pi) = (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ $\quad|\ \operatorname{int}\Pi = (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\dots\times(a_n,b_n)$

Φ – элемент. фигура, если $\Phi=\bigcup_{j=1}^{\ell}\Pi_j$, $\operatorname{int}\Pi_i\cap\operatorname{int}\Pi_j$

$\mu(\Phi) = \sum_{j=1}^{\ell}\mu(\Pi_j)$

Это определение корректно

$\mu^*(A) = \inf_{\Phi\supset A}\mu(\Phi)$, $\mu_*(A)=\sup_{\Phi\subset A}\mu(\Phi)$, $\mu^*(A)\ge\mu_*(A)$

Опр. A называется измеримым, если $\mu_*(A)=\mu^*(A)$. При этом $\mu(A) := \mu_*(A)=\mu^*(A)$

СВОЙСТВА

1. A_1, A_2 измер. $\Rightarrow A_1\cap A_2$, $A_1\cup A_2$, $A_1\setminus A_2$ измеримо
2. $A=\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$, A_j измеримо $\Rightarrow \mu(A)\le\sum\mu(A_j)$
   если $\operatorname{int}A_i\cap\operatorname{int}A_j = \varnothing$ $(i\ne j)$, то $\mu(A)=\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j)$

Критерий измеримости

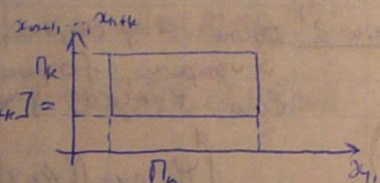
Ограниченное множество A измеримо $\Leftrightarrow \mu(\partial A)=0$

Понятие n кратного интеграла вводится аналогично

$\int_A \dots \int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$, $\int_A f d\mu$, $\int_A f(x)dx$

Сведение к повторному

1. $R \subset R^{n+k}$ $x_1,\dots,x_{n+k}$ $R = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_{n+k},b_{n+k}] =$



$= \Pi_n \times \Pi_k$, $\Pi_n = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$

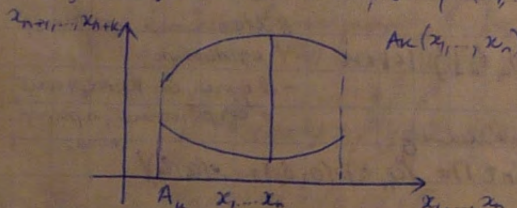
$\Pi_k = [a_{n+1},b_{n+1}]\times\dots\times[a_{n+k},b_{n+k}]$

f интегр. на Π_{n+k}; $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\Pi_n$ $\exists \int_{\Pi_k}\dots\int f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+k})dx_{n+1}\dots dx_{n+k}$

Тогда $\exists \int_{\Pi_n}\dots\int dx_1\dots dx_n \left(\int_{\Pi_k}\dots\int f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+k})dx_{n+1}\dots dx_{n+k}\right) =$

$= \int_{\Pi_{n+k}}\dots\int f(x_1,\dots,x_{n+k})dx_1\dots dx_{n+k}$.

Общий случай: $A\in R^{n+k}$; $A = \{ (x_1,\dots,x_n)\in A_n; (x_{n+1},\dots,x_{n+k})\in A_k(x_1,\dots,x_n)\}$



A измеримо в R^{n+k}

A_n измеримо в R^n

$\forall (x_1,\dots,x_n)\in A_n$ $A_k(x_1,\dots,x_n)$ измер. в R^n

f интегр. на A и $\forall(x_1,\dots,x_n)\in A_n$

$\exists$ $\exists \Phi(x_1,\dots,x_n) = \int_{A_k(x_1,\dots,x_n)}\dots\int f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+k})dx_{n+1}\dots dx_{n+k}$

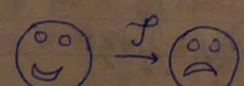
Тогда $\int_A\dots\int f(x_1,\dots,x_{n+k})dx_1\dots dx_{n+k} = \int_{A_n}\dots\int dx_1\dots dx_n \left(\int_{A_k(x_{n+1},\dots,x_{n+k})}\dots\int f(x_1,\dots,x_{n+k})dx_{n+1}\dots dx_{n+k}\right)$

30.10.08. Лекция 17

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Область – открытое связное множество.

R^n $x_1,\dots,x_n$



R'^n $x_1',\dots,x_n'$

$\Phi: \begin{cases} x_1' = \varphi_1(x_1,\dots,x_n)\\ \dots\dots\dots \\ x_n' = \varphi_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$

1. Φ взаимнооднозначн. Ω на Ω' (т.е. является биекцией)
2. $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in C(\bar\Omega)$; $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\in C(\Omega)$ и продолжаются до непрерывных функций в $\bar\Omega$ $(1\le i,j\le n)$ (есть функции, непрер. в $\bar\Omega$ и совпад. с данными функциями на множестве Ω)
3. Ω, Ω' – измеримые области

$J(x_1,\dots,x_n) = \frac{D(x_1',\dots,x_n')}{D(x_1,\dots,x_n)}$.

Пусть задана функция $f(x_1',\dots,x_n')$ интегр. в Ω'. Тогда интеграл по области Ω'

$\int_{\Omega'}\int f(x_1',\dots,x_n')dx_1'\dots dx_n' = \int_\Omega\int f(\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n)) |J(x_1,\dots,x_n)|\cdot dx_1\dots dx_n$

тем самым интегр. справа ∃.

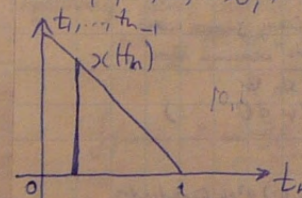
J может = 0 на множестве меры ноль.

Примеры

1. $\exists\Delta_n(a)$ – объем $\{(x_1,\dots,x_n)\in R^n / x_1\ge0,\dots,x_n\ge0, x_1+\dots+x_n\le a\}$ Ω'

a>0 Сделаем замену $x_1=at_1$, $x_2=at_2$, …, $x_n=at_n$; $\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(t_1,\dots,t_n)} = \det\begin{vmatrix} a&0&\dots&0\\0&a&\dots&0\\ 0&0&\dots&a\end{vmatrix} = a^n$

$\Omega\{t_1\ge0,\dots,t_n\ge0, t_1+\dots+t_n\le1\}$; $\Delta_n(a) = \int_\Omega\int dx_1\dots dx_n = \int_\Omega\int a^n dt_1\dots dt_n = a^n\Delta_n$ (1)



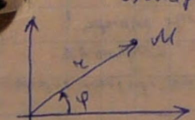
$D(t_n) = \{t_1\ge0,\dots,t_{n-1}\ge0, t_1+\dots+t_{n-1}\le 1-t_n\}$

$\Delta_n(1) = \int_0^1 dt_n \int_{D(t_n)}\dots\int dt_1\dots dt_{n-1} = \int_0^1 dt_n (1-t_n)^{n-1}\Delta_{n-1}(1) = \frac1n\Delta_{n-1}(1)$

$t_1+t_2+\dots+t_{n-1}\le 1-t_n$

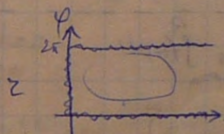
$\Delta_n(1) = \frac1n\cdot\frac1{n-1}\cdot\dots\cdot\frac12\cdot\Delta_1(1) = \frac1{n!} \Rightarrow \Delta_n(a) = \frac{a^n}{n!}$

Полярные координаты



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r\ge0$ $0\le\varphi\le2\pi$

$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$



Пусть D' – область на плоскости x, y, D' измеримо, $D'\setminus\{x\ge0, y=0\} = \Omega_1'\vee\dots\vee\Omega_n'$

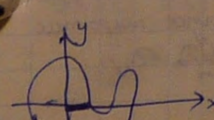
D (в координатах r и φ)

$\Omega_1\vee\dots\vee\Omega_n$

относит. координат r и φ

f(x,y) интегр. в D'

$\iint_{\Omega_j'} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_j} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$ (о.г.) $1\le j\le n$



$\iint_{D'\setminus\{x\ge0,y=0\}} f(x,y)dxdy = \iint_{D\setminus(\{r\ge0,\varphi=0\}\cup\{r\ge0,\varphi=2\pi\})}$

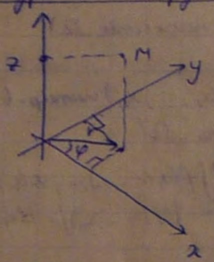
выбрасываем множество меры ноль

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

Цилиндрические координаты

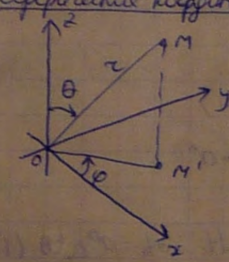
$z = z$
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$r = 0$ нет взаимн. одн.
$\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ — // —



$$\iiint\limits_{D'_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_{xyz}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Сферические координаты



$OM' = r\sin\theta$; $z = r\cos\theta$,
$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$r \geq 0$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $(<)$
$0 \leq \theta \leq \pi$ $(<)$

$r = 0$ — нет взаимнoй однозначности
$\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ — нет взаимн. однозн-ти
$\theta = 0$, $\theta = \pi$ — // —

$\leq$ или $<$ неважно (множество меры нуль)

r фиксиров. — сфера радиуса r
φ фиксиров. — полуплоскость
θ фиксир. — конус

$J = r^2\sin\theta$

$$\iiint\limits_{D'_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_{xyz}} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

В 1140 солнц закат сияло
В июле кажется лето
r^2 на $\sin\psi$
$d\varphi\ d\psi\ d\theta$:)

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int\limits_a^{R} f(t)\,dt$$

// На лекции погас свет.
— Вот, чем контачте карьера!
Домрина А.В.
— Точнее, прерванная карьера.

Несобственные интегралы

$D \subset R^k$ открыт.

$\{D_n\}$ назыв. исчерпанием для D, если
1) D_n открыто, $n \in N$
2) $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$
3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$

$D_n = \{x^2 + y^2 < n^2\}$ — исчерпание R^2

Если $K \subset D$, K — компакт, то $\exists N \cdot K \subset D_N$: $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ — открытое покрытие компакта $\Rightarrow$ можно выделить конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} D_n = D_N$

Определение: Пусть функция f интегрируема на $\forall$ измеримом подмножестве области D и $\exists I$: $\forall \{D_n\}$ — исчерп. послед-ти измеримых областей $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)\,dx = I$ (и не зависит от выбора исчерпания

(Случай $f \geq 0$ $\{\int\limits_{D_n} f(x)\,dx$ неубыв. $\forall \{D_n\}$ — исчерп. пос-ти измеримых областей)

Критерий интегрируемости неотрицат. функции:
Пусть f неотриц. в D, f интегр. на $\forall$ измеримом подмножестве области D.
Тогда f интегр. в $D \Leftrightarrow \exists \{D_n\}$ — исчерп. пос-ть измеримых множеств:
$\{\int\limits_{D_n} f(x)\,dx\}$ — ограничена

Док-во: Если f интегр. $\Rightarrow \forall \{D_n\}$ исчерп. $\Rightarrow \{\int\limits_{D_n} f(x)\,dx\}$ огранич.
$\Leftarrow$] есть пос-ть $\{D_n\}$: $\{\int\limits_{D_n} f(x)\,dx\}$ ограничена $\Rightarrow$ сходится (т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)\,dx$)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)\,dx = I$, при этом $\int\limits_{D_n} f(x)\,dx \leq I$, $n \in N$

Возьмем $\forall \{D'_n\}$ — другую пос-ть, $\overline{D'_n} \subset D'_{n+1} \subset D$ $\exists N$: $\overline{D'_n} \subset D_N \Rightarrow$ если мы проинтегр. нашу неотриц. ф-ю, компакт
то $\int\limits_{D'_n} f(x)\,dx \leq \int\limits_{D_N} f(x)\,dx$

$\int\limits_{D_n'} f(x)\,dx \leq I \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)\,dx = I' \leq I$. Меняя местами $\{D_n\}$ и $\{D_n'\}$, получаем $I \leq I'$ $\Rightarrow I = I'$

Пример. $\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ (неогр. ф-ция) $D_n = \{x^2+y^2<n^2\}$; $\iint\limits_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{n} dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-r^2} r\,dr =$ (пол. коорд.)
$= 2\pi \int\limits_0^{n} e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\left(\frac{e^{-r^2}}{2}\Big|_0^n\right) = \pi(1 - e^{-n^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$

$K_n = \{|x| < n, |y| < n\}$ — исчерп. пос-ть
$\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$; $\int\limits_{-n}^{n} dx\, e^{-x^2} \int\limits_{-n}^{n} dy\, e^{-y^2} = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \to \pi \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (2)

Признак сравнения:
Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ в D (области), f, g интегрируемы на $\forall$ измеримом подмножестве области D.
Тогда, если интеграл от функции $\int\limits_D g(x)\,dx$ сходится, то сх. и $\int\limits_D f(x)\,dx$.

Док-во: $\{D_n\}$ — исчерп. пос-ть $\Rightarrow \int\limits_{D_n} f(x)\,dx \leq \int\limits_{D_n} g(x)\,dx \Rightarrow$ в силу критерия
$\{\int\limits_{D_n} g(x)\,dx\}$ огран. для некот. $\{D_n\} \Rightarrow \{\int\limits_{D_n} f(x)\,dx\}$ огр. $\xrightarrow{\text{крит}} \int\limits_{D} f(x)\,dx$ сходится

1.11.08 Лекция 18

f интегр. на $\forall$ измеримом $A: \overline{A} \subset D$, A измеримо $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f интегр на $\forall$ измеримом замкнут. подмн-ве D

Из определения несобств. интеграла следует

<u>Линейность</u> f_1, f_2 интегр. в D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \int\limits_D (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx =$

$= \alpha \int\limits_D f_1(x)dx + \beta \int\limits_D f_2(x)dx$

<u>Абсолютная сходимость</u>

<u>Опр.</u> $\int\limits_D f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int\limits_D |f(x)|dx$.

<u>Теорема 1</u> Если $\int\limits_D |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_D f(x)dx$ сходится.

<u>Доказат-во:</u>

$f_+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$, $f_-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$ интегр. на $\forall$ замкнут. подмн-ве на D.

$0 \le f_+(x), f_-(x) \le |f(x)|$ $\quad f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$

т.к. сх. $\int\limits_D |f(x)|dx$, то сходится $\int (f_+(x) - f_-(x))dx = \int f(x)dx$

(т.к. $f_+(x) - f_-(x) \le |f(x)|$)

<u>Теорема 2</u> Если сходится $\int\limits_D f(x)dx$, то сходится $\int\limits_D |f(x)|dx$.

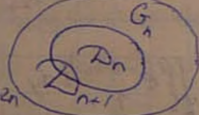
<u>Док-во.</u> (от противного)

Предположим, что интеграл не сходится абсолютно $\Rightarrow \exists \{D_n\}$-исчерп. пос-ть открытых измерим. множеств: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} |f(x)|dx = \infty$

Переходя, если нужно, к подпосл-тям $\int\limits_{D_{n+1}} |f(x)|dx > 3\int\limits_{D_n} |f(x)|dx + 2n$

$G_n \le D_{n+1} \setminus \overline{D}_n$; $\int\limits_{G_n} |f(x)|dx = \int\limits_{D_{n+1}} |f(x)|dx - \int\limits_{D_n} |f(x)|dx >$

$> 2\int\limits_{D_n} |f(x)|dx + 2n$



$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

Предположим, что $\int\limits_{G_n} f_+(x)dx \ge \int\limits_{G_n} f_-(x)dx$ (иначе $f \leftrightarrow -f$)

$\int\limits_{G_n} f_+(x)dx \ge \frac{1}{2}\int\limits_{G_n} |f(x)|dx > \int\limits_{D_n} f(x)dx + n$

G_n-открытое мн-во.

$G_n = \operatorname{int} G_n \Rightarrow f_+(x)$ - огранич. на G_n = определ. суммы Дарбу.

$\exists T: G_n = \bigcup\limits_{j=1}^{j_n} A_{n_j}: S_T = \sum\limits_{j=1}^{j_n} m_j \mu(A_{n_j}) > \int\limits_{D_n} f(x)dx + n$

(здесь $m_j = \inf\limits_{A_{n_j}} f(x)$)

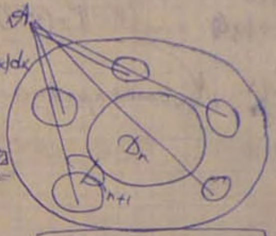
Если $m_j > 0$, то $f(x) = f_+(x)$, $x \in A_{n_j}$, при этом $\int_{A_{n_j}} f(x)dx = \int_{A_{n_j}} f_+(x)dx > m_j \cdot \mu(A_{n_j})$

$$S_T = \sum_{j: m_j > 0} m_j \cdot A_{m_j} \le \sum_{j: m_j>0} \int_{A_{n_j}} f(x)dx \le \int_{A_n} f(x)dx$$

$\exists A_n \supset \operatorname{int}\left(\bigcup_{j: m_j>0} A_{n_j}\right)$ - открытое мн-во $\Rightarrow S_T \le \int_{A_n} f(x)dx$

$\Rightarrow \int_{A_n} f(x)dx > \int_{\mathcal{D}_n} |f(x)|dx + n$

Обозначим $\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n \cup A_n$



$$\int_{\tilde{\mathcal{D}}_n} f(x)dx = \int_{A_n} f(x)dx + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_n} f(x)dx}_{\ge -|f(x)|} \ge \int_{A_n} f(x)dx - \int_{\mathcal{D}_n} |f(x)|dx = \boxtimes$$

$$\boxed{\int_{A_n} f(x)dx > \int_{\mathcal{D}_n} |f(x)|dx + n} \boxtimes$$

$\{\boxtimes\} > n$

$\{\tilde{\mathcal{D}}_{2n}\}$ исчерпывающ (т.к. 1. все $\tilde{\mathcal{D}}_n$ - открытые
2. по построению $\tilde{\mathcal{D}}_n$ содержит $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_{n+1}$ сод. $\tilde{\mathcal{D}}_n$

$\mathcal{D}_n \subset \tilde{\mathcal{D}}_n \subset \mathcal{D}_{n+1} \Rightarrow \overline{\tilde{\mathcal{D}}_{n}} \subset \tilde{\mathcal{D}}_{n+2}$

$\Rightarrow \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1} \Rightarrow \overline{\mathcal{D}_n} \subset \overline{\mathcal{D}_{n+1}} \subset \mathcal{D}_{n+2}$

(т.к. послед-ть исчерпывающая)

3. $\Downarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{D}}_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n = \mathcal{D} \Rightarrow$ все объединение совпадает с $\mathcal{D}$.)

Итак, мы построили исчерп. $\{\tilde{\mathcal{D}}_{2n}\}$: $\lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{\mathcal{D}}_{2n}} f(x)dx = \infty$. Противоречие сходимости $\int_{\mathcal{D}} f(x)dx$.

Почему же в однокр. ф-ции такое неверно?

Т.к. там мы рассм. не только по открыт. мн-вам, но и по лучам.

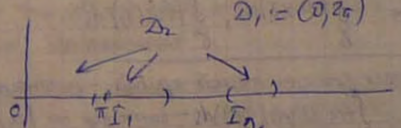
$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ — абсолютно расходится

$$\int_{I_n} \frac{\sin x}{x}dx \quad \int_{\pi/4+2\pi n}^{3\pi/4+2\pi n} \frac{\sin x}{x}dx \ge \frac{\pi/2}{\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \int_{I_n} \frac{\sin x}{x} dx$ - расходится

где $I_n = \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$

$\mathcal{D}_1 := (0, 2\pi)$



$\mathcal{D}_2: \int \frac{\sin x}{x}dx > 2$

$\mathcal{D}_1 \cup I_1 \cup I_{n_1} = \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_3 = (0, \pi+2\pi n_1) \cup I_{n_1+1} + \ldots + I_{n_2}: \int_{\mathcal{D}_3} \frac{\sin x}{x}dx > 3$

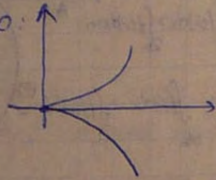
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (в $\mathbb{R}^3$)

Кривая $\gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\xi(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$

Опред. γ является гладкой кривой, если
1) $\varphi, \psi, \xi \in C^1[a,b]$;
$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\xi'(t))^2 \neq 0,\ t\in[a,b]$

Пример

$x=t^2$
$y=t^3$ нарушается при $t=0$:
$t\in[-1,1]$



$t=\sqrt[3]{y}$
$x=y^{2/3}$??
$x^3=y^2 \Rightarrow y=x^{3/2}$

Определение γ называется кусочно гладкой кривой, если $\exists a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$ $\varphi, \psi, \xi\in C[a,b]$; $\gamma_j=\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\xi(t) \end{cases}$, $t\in[t_{j-1}, t_j]$ – гладкая, $1\le j\le k$

γ – гладкая кривая $s(t)=\int\limits_a^t\sqrt{(\varphi'(\tau))^2+(\psi'(\tau))^2+(\xi'(\tau))^2}\,d\tau$ – длина дуги кривой

$s(b)=|\gamma|$ – длина кривой γ. $C^1[0,|\gamma|]$ $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\neq 0$

$s'(t)=\sqrt{\ldots}>0,\ t\in[a,b],\ t=t(s)$ $s\in[0,|\gamma|]$

Пусть $f(x,y,z)$ определена на гладкой кривой γ, т.е. определена $f(\varphi(t),\psi(t),\xi(t)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ определена $f(x(s),y(s),z(s))$, $s\in[0,|\gamma|]$

$x=x(s)=\varphi(t(s))$
$y=y(s)=\psi(t(s))$
$z=z(s)=\xi(t(s))$
$s\in[0,|\gamma|]$

Определение Если существует $\int\limits_0^{|\gamma|} f(x(s),y(s),z(s))\,ds$, то этим интегралом назыв. криволинейный интеграл 1-го рода от f по кривой γ.

Обозначим $\int\limits_\gamma f(x,y,z)\,ds$, $\int\limits_\gamma f(\Sigma(s))\,ds$

Физическ. смысл такой кривой – плотность f.
Пусть $f(x(s),y(s),z(s))$ – интегр на $[0,|\gamma|]$. (непрер $f\in C[0,|\gamma|]$)
Замена переменной:

Утв. Криволин. интеграл первого рода не меняется при смене ориентации гладкой кривой.

Док-во: $\gamma: \begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \\ z=z(s) \end{cases}$ $s\in[0,|\gamma|]$ $\gamma^-: \begin{cases} x=x(|\gamma|-s_1) \\ y=y(|\gamma|-s_1) \\ z=z(|\gamma|-s_1) \end{cases}$

$s_1\in[0,|\gamma|]$, s_1 - интегр. непр на γ^-

$$\int_{\gamma^-} f(x,y,z)ds \underset{\text{по опред.}}{=} \int_0^{|\gamma|} f(x(|\gamma|-s_1), y(|\gamma|-s_1), z(|\gamma|-s_1))ds_1 = \{s=|\gamma|-s_1\} =$$

$$= \int_{|\gamma|}^0 f(x(s),y(s),z(s))(-ds) = \int_0^{|\gamma|} f(x(s),y(s),z(s))ds = \int_\gamma f(x,y,z)ds$$

Опр γ - кусочно-гл. кривая, то $\int_\gamma f(x,y,z)ds \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{l} \int_{\gamma_j} f(x)dx$ - при условии, что $\exists$ каждый из интегралов.

Замечание Для криволин интеграла 1-го рода справедливы св-ва линейн, аддит-ти. и т.д. ← те же свойства, что и для однокр. интеграла

7.11.08 Лекция 19

$\gamma: \begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \\ z=z(s) \end{cases}$ $s\in[0,|\gamma|]$

$\tau(s)=\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ - касательный вектор в точке s $s\in[0,|\gamma|]$

непр-ны на $[0,|\gamma|]$.

γ - гладкая кривая

$$|\tau(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 \leftarrow \text{т.к. } s \text{ - натур. пар-р}$$

$$\left(l=\int_0^l \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}ds \Rightarrow 1=\sqrt{(x'(l))^2+(y'(l))^2+(z'(l))^2}\right.$$

$\bar{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ P,Q,R опред. на γ

векторн поле = векторн функция

Опр. $\int_\gamma (a,\tau)ds$ назыв. криволин. интегралом 2-го рода от векторной функции $\bar{a}$ по γ.

Работа. Физич. смысл - работа поля $\bar{a}$ по перемещению мат. точки вдоль γ.

Утв. При смене ориентации кривой интеграл 2го рода меняет знак.

γ^- $x=x(|\gamma|-s_1)$, $y=y(|\gamma|-s_1)$, $z=z(|\gamma|-s_1)$

$s_1\in[0,|\gamma|]$

Найдем касат вектор к кривой γ^- и обозначим его τ_-

$$\tau_-=\left(\frac{dx}{ds_1}, \frac{dy}{ds_1}, \frac{dz}{ds_1}\right) = -\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = -\tau(|\gamma|-s_1)$$

в т. s_1

$$a(|\gamma|-s_1) = (P(x(|\gamma|-s_1), y(|\gamma|-s_1), z(|\gamma|-s_1)), Q(\dots), R)$$

$$a(s) = (P(x(s), y(s), z(s)), Q(\dots)\dots)$$

$$\int_{\gamma^-}(a,\tau)ds_1 = \int_\gamma (a(s_1), \tau_-(s_1))ds_1 = -\int_\gamma (a(s_1), \tau(|\gamma|-s_1))ds_1 = -\int_0^{|\gamma|}(a(|\gamma|-s_1), \tau(|\gamma|-s_1))ds_1 =$$

$|\gamma|-s_1$ $\quad s_1=|\gamma|-s$

$$= -\int_{|\gamma|}^0 (a(s),\tau(s))(-ds) = -\int_0^{|\gamma|}(a(s),\tau(s))ds = -\int_\gamma (a,\tau)ds$$

$$P(x(|\gamma|-s_1), y(\dots), z(\dots))\cdot\frac{d}{ds_1}x + Q(\dots)\cdot\frac{d}{ds_1}y + .$$

Пусть P, Q, R непрерывны на γ (т. е. $P(x(s), y(s), z(s)), Q(\dots), R(\dots) \in C([0, |\gamma|])$)

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases} t\in[a,b] \qquad \int_\gamma (a,\tau)ds = \int_0^{|\gamma|} \Big(P(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx}{ds} + Q(x(s), y(s), z(s))\frac{dy}{ds} + R(x(s), y(s), z(s))\frac{dz}{ds}\Big)ds$$

$$\Rightarrow \{s = s(t);\ ds = \frac{ds}{dt}dt,\ t\in[a,b]\} = \int_a^b \Big(P(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \frac{dx}{ds}\Big|_{s(t)} \frac{ds}{dt} + Q(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t)) \frac{dy}{ds}\Big|_{s(t)}\frac{ds}{dt} + R(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))\frac{dz}{ds}\Big|_{s(t)}\frac{ds}{dt}\Big)dt$$

$$\frac{dx}{ds}\Big|_{s(t)} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(x(s(t))) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Утв. 2 Если P, Q, R непрерывны на γ - гладкая кривая, то $\int_\gamma (a,\tau)ds =$

$$= \int_a^b \big(P(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))\, \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \zeta(t))\, \zeta'(t)\big)dt$$

Замечание 1 $\int_\gamma (a,\tau)ds \overset{def}{=} \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ (интеграл так обозначается)

Замечание 2 Если γ - кусочно гл. кривая, то $\int_\gamma (a,\tau)ds \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} (a,\tau)ds$

Замечание 3 Если $\gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j$, Γ_j - кусочно-гл. непересек. кривые, то

$$\int_\gamma (a,\tau)ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} (a,\tau)ds$$

Замечание 4 Если γ - замкнут. кривая, то $\int_\gamma (a,\tau)ds$ называется циркуляцией вектор. поля вдоль γ.

на плоскости (в пр-ве у области границей является ногами пов-ть)

Замечание 5 Если γ - граница области D ($\gamma = \partial D$), γ - кусочно гладкая кривая или объединение кусочно гл. кривых, то ориент. выбир. так, что при обходе вдоль γ область остав. слева

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx \qquad \Big|\ x = \cos t,\ y = \sin t \quad t\in[0,2\pi)$$

$x^2+y^2=1$ против часов. стрелки

$$\int_0^{2\pi} (\cos t \cdot \cos t - \sin t(-\sin t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Формула Грина

Жорданова кусочно-гл. кривая - замкнутая кусочно гл. кривая без самопересечений.

$D \subset \mathbb{R}^2$ - огранич. область, ∂D состоит из конечн. числа непересек. кусочно-гл. жордан. кривых. $P, Q \in C(\overline{D})$; $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ непрер. в D и имеют непрер. продолжение на $\overline{D}$!

тогда

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dx\,dy$$

ориент. так, что область D осталась слева.

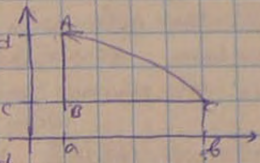
Док-во для частного случая

$D = \triangle ABC$

$\breve{CA}$ — гладк. кривая, $y = y(x)$, строго убыв. на $[a, b]$

$\exists$ {монотонная кривая}

$x = x(y)$ $\quad [a, b]$



$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^{x(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \underset{\text{формула Ньютона-Лейбница}}{=} \int_c^d dy\,(Q(x(y),y) - Q(a,y)) = \underbrace{\int_c^d Q(x(y),y)\,dy}_{I_1} - \underbrace{\int_c^d Q(a,y)\,dy}_{I_2} \boxed{=}$$

$\breve{AC}$ гладк. кривая $\quad x = x(s),\ y = y(s),\ s \in [0, |\breve{CA}|]$

$s = 0 \leftrightarrow c$

$s = |\breve{CA}| \leftrightarrow d$

$$I_1 = \int_0^{|\breve{CA}|} Q(x(s), y(s))\,y'(s)\,ds = \int_{\breve{CA}} Q(x,y)\,dy; \quad I_2 = -\int_{\breve{BA}} Q(x,y)\,dy =$$

$y = y(s)$

$$= \int_{\breve{AB}} Q(x,y)\,dy.$$

Но $\int_{\breve{BC}} Q(x,y)\,dy = 0$

$y = c$ на $\breve{BC}$, $dy = 0$

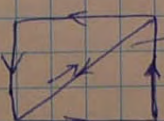
$$\boxed{=} \int_{\breve{CA}} Q(x,y)\,dy + \int_{\breve{AB}} Q(x,y)\,dy + \overset{0}{\int_{\breve{BC}} Q(x,y)\,dy} = \int_{\partial D} Q(x,y)\,dy$$

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b dx \int_c^{y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = -\int_a^b dx\,(P(x,y(x)) - P(x,c)) = \int_a^b (P(x,c))\,dx - \int_a^b (P(x,y(x)))\,dx$$

$$= \int_{\breve{BC}} P(x,y)\,dx - \int_{\breve{AC}} P(x,y)\,dx + 0 = \int_{\breve{BC}} P(x,y)\,dx + \int_{\breve{CA}} P(x,y)\,dx + \underbrace{\int_{\breve{AB}} P(x,y)\,dx}_{0} = \int_{\partial D} P(x,y)\,dx!$$

Далее

Формула Грина справедлива и для области, кот. можно разрезать на конечное число криволин. треугольников."



интегр. по общей части сократ.

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial D_j} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \iint\limits_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

$Q = x,\ P = 0 \quad \int_{\partial D} x\,dy = \iint_D dx\,dy = \mu(D).$

площадь

$\iint_D (-y)\,dx = \iint_D (1 - 0)\,dx\,dy = \mu(D)$

Итог: :)

$\Downarrow \int_{\partial D} x\,dy = \int_{\partial D} (-y)\,dx = \mu(D)$ - WOW

Понятие поверхности

Опр. $\Phi \subset R^3$ называется простой поверхностью, если Φ яв. графиком C^1 гладкой функции над областью лежащей в одной из коорд. плоскостей.

(область на (x,y))

т.е. $\Phi = \{(x,y,z) : (x,y) \subset D_z,\ z = f_z(x,y)\}$ $\quad f_z \in C^1(D_z)$

или $\Phi = \{(x,y,z) : (y,z) \in D_x,\ x = f(y,z)\}$ $f_x \in C^1(D_x)$

$\Phi = \{(x,y,z) : (z,x) \in D_y,\ y = f_y(z,x)\},\ f_y \in C^1(D_y)$

Лекция 20 8.11.08

$M \in R^3$: окрестностью точки M называется любое открытое множество в R^3, содержащее M.

Связное множество $\Phi \subset R^3$ называется ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, если $\forall M \in \Phi\ \exists U_M$ (окрестность точки M) такая, что $\Phi \cap U_M$ является простой поверхностью. Из определения следует, что простая поверхность является гладкой ($\forall M\ U_M = R^3$)

Пример $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ сфера

Покажем, что S — гладкая поверхность.

$\forall M \in S : M(x_0,y_0,z_0)$ — хотя бы одна из координат отлична от нуля (пусть это x_0)

- $x_0 > 0 \Rightarrow U_M = \{(x,y,z) \mid x > 0\}$

$S \cap U_M = \{(x,y,z) \mid x = \sqrt{1-y^2-z^2},\ \underbrace{y^2+z^2<1}_{\text{плоская область } D}\}$

простая поверхность

$\Rightarrow f(y,z) = \sqrt{1-y^2-z^2} \in C^1(D)$

- $x_0 < 0 \Rightarrow U_M = \{(x,y,z) \mid x<0\}$

Но S не является простой поверхностью, т.к. не проектируется однозначно ни на одну из координатных плоскостей.

Пример: поверхность уровня

$\exists\ \Omega$ — область в R^3

$\Phi = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega : F(x,y,z) = 0\}$, где $F(x,y,z) \in C^1(\Omega)$,

$\mathrm{grad}\, F|_\Phi \neq 0$, Φ связна $\quad (\mathrm{grad}\, F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}))$

Тогда Φ гладкая поверхность

Док-во: $\forall M(x_0,y_0,z_0) \in \Phi$

Пусть $\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M \neq 0$. По теореме о неявной функции

$\exists \delta > 0 : \Phi \cap \{|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ |z-z_0|<\delta\} = \{(x,y,z) \mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ z = f(x,y)\}$, где

$f \in C^1(|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta)$

(сфера — частный случай поверхности уровня)

Пример: параметрически заданная поверхность

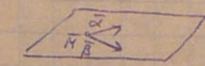
$\Sigma = \Sigma(u,v)$ $\quad$ (т.е. $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$)

отображение

Пусть: 1) G — плоская область; $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ непрерывны в $\bar{G}$ и их частные производные непрерывны в G

2) отображение r инъективно в $\bar{G}$ (т.е. если $(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$, то $r(u_1,v_1) \neq r(u_2,v_2)$)

3) $\forall (u,v) \in G$ $\quad rg\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right] \neq 0$



$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{\bar\alpha} u + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\bar\beta} v + \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}_{M}$ (плоскость)

$\Rightarrow$ 1) $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C(\bar{G}) \cap C_1(G)$

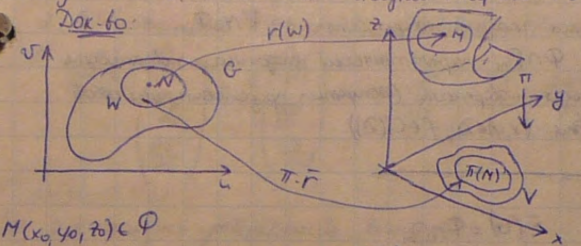
2) $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ линейно независимы $\Rightarrow$ отображение инъективно

3) $\frac{\partial \bar r}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) = \alpha$ $\quad [\alpha,\beta] \neq 0$

$\frac{\partial \bar r}{\partial v} = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}) = \beta$

Теорема Пусть отображение r удовлетворяет условиям (1,2,3). Тогда $\Phi = \bar r(G)$ является гладкой поверхностью.

Док-во:



$\forall M(x_0,y_0,z_0) \in \Phi$

Из условия 2) $\exists!\ N(u_0,v_0) \in G_1 : \bar r(N) = M$

Из условия 3) хотя бы один из главных миноров матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ отличен от нуля.

Предположим для определенности, что это $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|_N$ $(\neq 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ можно разрешить в окрестности точки N.

$\pi : (x,y,z) \mapsto (x,y)$ (проектирование)

$\pi(M) = (x_0,y_0)$

$\pi \cdot r(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$\exists N$: Окрестность точки N ($W \subset G$, W — открытое множество)

$\exists V$ — окрестность точки $\pi(M)$:

$\pi \cdot r$ является диффеоморфизмом области W на область V

(т.е. $\exists$ обратное отображение $(\pi \cdot \bar r)^{-1}$ $(x,y) \to u(x,y), v(x,y)$ $(V \to W)$;

$u(x,y), v(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными в V)

$r(W) = \{(x,y,z) \mid x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in W\} \Leftrightarrow \{(x,y,z) \mid (x,y) \in V,\ z = z(u(x,y), v(x,y))\}$

$z = f(x,y)$ — непрерывна вместе с частными производными

Осталось правильно выбрать окрестность точки M.

D — область: $\bar D \subset V,\ \pi(M) \in D$

Докажем: $\exists \delta > 0 : \Phi \cap \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ |z - f(x,y)| < \delta\} = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$

Предположим противное:

$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists (x_n,y_n,z_n) = M_n : (x_n,y_n) \in D,\ |z_n - f(x_n,y_n)| < \delta,\ z_n \neq f(x_n,y_n)$ (M_n — «лишняя точка»)

$\exists! N_n$ $\quad M_n = r(N_n)$, $N_n \in G \setminus N$ (т.к. в W $z = f(x,y)$) $/ N_n(u_n, v_n)$

G ограничено $\Rightarrow \{N_n\}$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists \{N_{n_k}\}$ – сходящаяся последовательность: $N_{n_k} \to N'(u', v')$; $N' \in \overline{G \setminus W} = \overline{G} \setminus W$

$\overline{r}$ непрерывно в $\overline{G} \Rightarrow (x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k}) = \overline{r}(u_{n_k}, v_{n_k}) \to \overline{r}(u', v') = (x', y', z') = M'$

Т.к. $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in D \Rightarrow (x', y') \in \overline{D} \subset V$

$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(x', y') \Rightarrow z' = f(x', y')$

Таким образом, $M' \in F(W)$, но $N' \notin (W)$

$\Downarrow \; \overset{\shortparallel}{\overline{r}}(N')$

$\Rightarrow M'$ является образом некоторой точки из $W \Rightarrow$ противоречие с инъективностью $\overline{r}$ в $\overline{G}$

Замечание: параметрически заданная поверхность связна, т.к. G – связное множество (область...

Теорема

Связное множество Φ является гладкой поверхностью $\Leftrightarrow \forall M \in \Phi$ $\exists O_M$ – окрестность точки M: $\Phi \cap O_M$ – параметрически заданная поверхность

Док-во: $\Rightarrow$ Пусть Φ – гладкая поверхность (допустим, представляющая собой график функции $z = f(x,y)$ для $(x,y) \in D$, $f \in C^1(D)$)

$\forall G: M \in G_1, \overline{G}_1 \subset D$

$O_M = U_M \cap \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G\}$

отображение $r: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$ $\quad \overline{r}(G) = \Phi \cap O_M$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D) \Rightarrow$ условие (1) выполнено

Если $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow \overline{r}(u_1, v_1) \neq \overline{r}(u_2, v_2) \Rightarrow$ (2) выполнено

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ условие (3) выполнено

$\Leftarrow$ Т.к. параметрически заданная поверхность гладкая $\Rightarrow$ верно

$(\forall M \in \Phi \cap O_M \; \exists U_M: (\Phi \cap O_M) \cap U_M = \Phi \cap (U_M \cap U_M)$ – простая поверхность)

Лекция 21 $\qquad$ 13. 11. 08

Утв. Пусть Φ – параметрически заданная поверхность (в декартовых координатах x, y, z). Тогда в $\forall$ другой декарт. системе координат Φ – тоже параметрически заданная поверхность.

Док-во: Φ: $\overline{r} = \overline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in G$ в декартовых координатах x, y, z.

Отображение инъективно в $\overline{G}$; непр. и имеет ч. пр-е в G; ранг матрицы из ч. пр-х $\neq 0$

$\exists O'x'y'z'$ – другая декарт. с.к. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \overline{b}$ $\quad A$ – невыр. матрица, $\overline{b}$ – вектор

В координатах x', y', z' $\quad \overline{r}' = \overline{r}'(u,v) = \begin{pmatrix} x'(u,v) \\ y'(u,v) \\ z'(u,v) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} + \overline{b}$ $\quad \Phi = \overline{r}'(G)$ в новых координатах

1. $\overline{r}'$ непрерывно в $\overline{G}$ и имеет непр. частн. производные в G,
2. $\overline{r}'$ инъективно в $\overline{G}$, т.к. $\overline{r}$ инъективно, A – невыр. матрица.
3. $\frac{\partial \overline{r}'}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial u} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = A \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial \overline{r}'}{\partial u} = A \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$

т.к. A невырожд., $\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$ ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial \overline{r}'}{\partial u}, \frac{\partial \overline{r}'}{\partial v}$ – ЛНЗ

Из 2-х последних утверждений вытекает

Следствие. Если Φ гладкая поверхность (отн-но декарт. с.к. $Oxyz$), то Φ является гладкой поверхностью в $\forall$ другой декарт. с.к.)

Док-во: $\forall M \in \Phi$ $\exists O_M$: $\Phi \cap O_M$ – парам. зад. пов-ть (отн-но декарт. координат $Oxyz$)

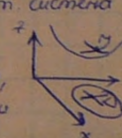
$\Rightarrow \Phi \cap O_M$ – параметр. заданная пов-ть в $\forall$ другой декарт. с.к. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi$ – гладкая поверхность в $\forall$ другой с.к.

Понятие касательной плоскости

Φ – гладкая поверхность, $M \in \Phi \Rightarrow$ существует декарт. система координат $Oxyz$:

$\Phi \cap U_M = \{(x,y,z) \mid \underset{(x,y) \in D}{z = f(x,y)}\}$ $\quad f \in C^1(D)$



$M(x_M, y_M, z_M)$

$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = y_M \\ z = f(t, y_M) \end{cases}$ $\quad \gamma_2: \begin{cases} x = x_M \\ y = t \\ z = f(x_M, t) \end{cases}$ $\quad \gamma_1, \gamma_2$ – гладкие кривые, принадлежащие Φ и проходящие через M.

$\tau_1 \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_M, y_M)}\right)$, $\tau_2 \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_M, y_M)}\right)$ – кас. векторы γ_1 и γ_2 в точке M. Они ЛНЗ

γ_1, γ_2

Покажем, что для $\forall$ гладкой кривой γ, принадл. Φ и проходящей через M ее касат. вектор в точке M является линейной комбинацией τ_1 и τ_2.

γ гладкая, $\gamma \subset \Phi$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$ $\quad M = (\overset{x_M}{x(t_M)}, \overset{y_M}{y(t_M)}, \overset{z_M}{z(t_M)})$

τ – касательный вектор к γ в точке M.

$$\tau = \left(x'(t_M),\ y'(t_M),\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_M, y_M)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_M, y_M)} \cdot y'(t_M)\right) = x'(t_M)\cdot\bar\tau_1 + y'(t_M)\cdot\bar\tau_2$$

__Утверждение__ Существует единств. плоскость, проходящая через M и содерж. касат. векторы к гладким кривым, проходящим через M и принадл. Φ. Эта плоскость называется касательной к Φ в точке M и обозн. $T_M(\Phi)$

__Док-во__ Для задания $T_M(\Phi)$ нужно знать M и $n(M)$ – единичн. нормаль к плоскости

1) Φ – простая плоскость $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D$

$$n_2(M) = \frac{[\tau_1, \tau_2]}{|[\tau_1, \tau_2]|}, \quad n_2(M) = -n_1(M)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \underset{=}{(1)} \quad n_1(M) = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\Bigg|_{(x_M, y_M)}$$

$$z - z_M = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_M, y_M)}(x - x_M) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_M, y_M)}(y - y_M)$$ – уравнение $T_M(\Phi)$

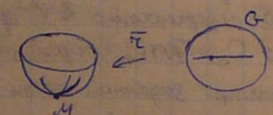
2) Φ – поверхность уровня $\mathcal{F}(x,y,z) = 0$. Если $\gamma\in\Phi$ $\quad \gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$\mathcal{F}(x(t), y(t), z(t)) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_M \cdot x'(t_M) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_M y'(t_M) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M z'(t_M) = 0 \qquad \underset{=}{(2)} \quad \bar n_1(M) = \frac{\operatorname{grad}\mathcal{F}|_M}{|\operatorname{grad}\mathcal{F}|_M|}, \quad \bar n_1(M) = -\bar n_2(M)$$

Параметрически заданная пов-ть

$r = r(u,v) \quad M = r(u_M, v_M)$



$\gamma_1: \bar r = \bar r(t, v_M)$

$\gamma_2: \bar r = \bar r(u_M, t)$

$\bar\tau_1 = \frac{\partial \bar r}{\partial u}\Big|_{(u_M, v_M)}$

$\bar\tau_2 = \frac{\partial \bar r}{\partial v}\Big|_{(u_M, v_M)}$ – линейная независимы $\Rightarrow$

$$\bar n_1(M) = \frac{\left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v}\right]\right|} = \left\{\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}}$$

__Определение__ Φ называется ОРИЕНТИРОВАННОЙ (или двусторонней) если на Φ существует непрерывное поле норм. единичн. длины

Из (1), (2), (3) $\Rightarrow$ простая поверхность, поверхность уровня, парам. заданная пов-ть – ориент. пов-ти.

Не ориент. пов-ть – поверхность Мёбиуса

__Лемма!__ Пусть Φ – гладкая поверхность, тогда $\forall M\in\Phi$ $\exists V_M$ – окрестность точки M такая что $\Phi_M = \Phi\cap V_M$ удовлетв.

а) на Φ_M существует непрерывное поле единичн. нормали, причем $\forall P_1, P_2\in\Phi_M$ $\widehat{n(P_1), n(P_2)} < \frac{\pi}{2}$.

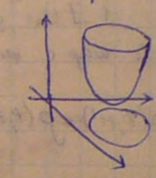
б) Φ_M однозначно проектир. на $T_P(\Phi)$ $\forall P\in\Phi_M$.

__Док-во:__ Без ограничения общности $\exists U_M$ – окр-ть точки $M(x_M, y_M, z_M)$:

$\Phi\cap U_M = \{z = f(x,y),\ (x,y)\in D\}$ $\quad f\in C(D)$ по формуле (1)

$\bar n(M) = \bar n_1(M)$ – непрер. поле нормали $\Rightarrow \exists B$ – открытый круг с центром (x_M, y_M), $B\subset D$: $\forall P(x,y,z)$: $(x,y)\in B$, $z = f(x,y)$

$\widehat{\bar n(M), n(P)} < \frac{\pi}{4}$



$V_M = U_M \cap \{(x,y,z),\ (x,y)\in B\}$

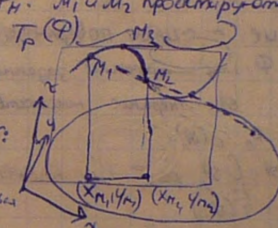
$\Phi_M = \Phi\cap V_M = \{z = f(x,y),\ (x,y)\in B\}$

$\forall P_1, P_2\in\Phi_M \Rightarrow \widehat{\bar n(P_1)\bar n(P_2)} \le \widehat{\bar n(P_1)\bar n(M)}$ $\qquad \widehat{n(P_2) n(M)} < \frac{\pi}{2}$

т.к. угол между $\forall$ 2-мя нормалями $< \frac{\pi}{2}$.

Покажем, что выполнено условие б):

Предположим противное: $\exists P\in\Phi_M$, $\exists M_1, M_2\in\Phi_M$: M_1 и M_2 проектируются в одну и ту же точку касательной плоскости. $T_P(\Phi)$



$\overline{M_1M_2} \parallel n(P)$. Проведем через M_1 и M_2 плоскость, $\parallel Oz$. Эта плоскость пересечет Φ по кривой γ:

$x = (1-t)x_{M_1} + t x_{M_2}$ $\qquad \gamma\subset\Phi$,

$y = (1-t)y_{M_1} + t y_{M_2}$ $\qquad \gamma$ – гладк. кривая

$z = f(x,y)$ $\qquad$ Кривая с концами M_1 и M_2.

По теореме Лагранжа $\exists\xi\in(0,1)$: $\tau(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi)) \parallel \overline{M_1M_2} \Rightarrow$ // теорема Лагранжа для $f((1-t)\cdot x_{M_1} + t x_{M_2}, (1-t)y_{M_1} + y_{M_2})$

$\Longrightarrow$

$$\underset{t=1}{f(x_{M_2}, y_{M_2})} - \underset{t=0}{f(x_{M_1}, y_{M_1})} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{t=\xi}(x_{M_2} - x_{M_1}) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{t=\xi}(y_{M_2} - y_{M_1})$$

// Теорема Ролля

$$\tau(\xi) = \begin{pmatrix} x_{M_2} - x_{M_1} \\ y_{M_2} - y_{M_1} \\ \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=\xi} \end{pmatrix} = \overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_{M_2} - x_{M_1} \\ y_{M_2} - y_{M_1} \\ z_{M_2} - z_{M_1} \end{pmatrix} = f(x_{M_2}, y_{M_2}) - f(x_{M_1}, y_{M_1})$$

$\Longrightarrow \bar\tau(\xi) \parallel n(P)$

$M_3 = \gamma(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)) \Rightarrow \bar n(M_3) \perp \bar n(P)$

противоречие а).

15.11.08 Лекция 22

Лемма 2. Пусть Φ — гладкая поверхность, $K \subset \Phi$ (K — компактное множество). Тогда $\exists d>0: \forall Q\subset K$ $\operatorname{diam} Q<d$, $\exists M, U_M$, удовлетворяющие условиям леммы 1 и $Q\subset U_M$.

Док-во: (от противного) $d=\frac{1}{n}$: $\exists Q_n\subset K$ $\operatorname{diam} Q_n<\frac{1}{n}$,
$\forall M, U_M$, удовлетворяющим условиям леммы 1 $Q_n \not\subset U_M$, $M_n\in Q_n$.

Т.к. $\{M_n\}$ последовательность точек компакта K, то существует сходящаяся подпоследовательность $M_{n_k}\to M'\in K\subset \Phi$

$\Rightarrow$ по лемме 1 $\exists U_{M'}$, удовлетворяющая условиям леммы 1 $\Rightarrow \exists r>0$:
B_n — открытый шар с центром в точке M радиуса r — содержится в U_M.

$$\forall P\in Q_{n_k}\quad \rho(P,M')\le \rho(P,M_{n_k})+\rho(M_{n_k},M') \le \frac{1}{n_k}+\underbrace{\rho(M_{n_k},M')}_{\to 0 \text{ при } n\to\infty}$$

$\Rightarrow \rho(P,M')<r$ при достаточно больших k

$\Rightarrow Q_{n_k}\subset B_n$ при достаточно больших k

$\Rightarrow Q_{n_k}\subset U_{M'}$ — противоречие (мы предположили, что никакая окрестность $U_{M'}$ не содержит Q_{n_k})

Понятие площади поверхности

Рассмотрим Φ — параметрически заданную поверхность ($\Phi = r(G)$)

Рассмотрим A — измеримое множество: $\bar A\subset G$.

Пусть $\Phi_A = r(A)$.

$T: A=\hat{\bigcup} A_j$ — разбиение множества A

$\Phi_A = \hat{\bigcup\limits_{j=1}^{n}}\Phi_j$, $\Phi_j = r(A_j)$

r непрерывно в $\bar G \Rightarrow r$ равномерно непрерывно в $\bar G$, т.е. $\exists\delta>0: \forall N_1,N_2\in G$:
$\rho(N_1,N_2)<\delta \quad \rho(r(N_1),r(N_2))<\frac{d}{2}$, где $d>0$ — удовлетворяет лемме 2 для $K=\bar\Phi_A$

Таким образом, если $d_T<\delta \rightarrow \operatorname{diam}\Phi_j\le\frac{d}{2}<d$.

По лемме 1 $\forall P_j\in\Phi_j$ множество Φ_j однозначно проектируется на $T_{P_j}(\Phi)$
(касательная плоскость)

Обозначим Π_j проекцию Φ_j на $T_{P_j}(\Phi)$; $P_j = r(u_j,v_j)$

Лемма 3. Π_j измеримо и $\mu(\Pi_j)=\iint\limits_{A_j}(n(u,v),n(u_j,v_j))\cdot\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$, где n — нормаль из леммы 1

Доказательство: фиксируем $j\in\overline{1,n}$

Возьмем декартову систему координат $O'x'y'z'$, где $O'=P_j$, Oz' сонаправлена с нормалью $\bar n(P_j)$

В этой системе координат $n(P_j)=(0,0,1)$.

Т.к. $\cos(n(u_j,v_j),n(u,v))>0$ по лемме 1, то

$$\frac{\frac{D(x',y')}{D(u,v)}}{\left|[r'_u,r'_v]\right|} = \cos(n(u_j,v_j),n(u,v)) \Rightarrow \frac{D(x',y')}{D(u,v)}>0 \text{ в некоторой окрестности } \bar A_j.$$

$\Rightarrow$ существует взаимно-однозначное отображение $(u,v)\to(x',y')$ в некоторой окрестности $\bar A_j$; x',y' непрерывны вместе с производными в некоторой окрестности $\bar A_j$ и $\frac{D(x',y')}{D(u,v)}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ справедлива формула замены переменных в двойном интеграле, т.е. Π_j измеримо, причем

$$\mu(\Pi_j)=\iint\limits_{\Pi_j}dx'dy' = \iint\limits_{A_j}\frac{D(x',y')}{D(u,v)}du\,dv = \iint\limits_{A_j}(n(u,v),n(u_j,v_j))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$$

$$\left|\left[\frac{\partial \bar r}{\partial u},\frac{\partial \bar r}{\partial v}\right]\right| = \left|\left[\frac{\partial r'}{\partial u},\frac{\partial r'}{\partial v}\right]\right|$$

Лемма 4. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall T: \operatorname{diam} T<\min(\delta,\delta_0)$ / где если $\operatorname{diam}T<\delta_0$, то $\operatorname{diam}\Phi_j\le\frac{d}{2}$ / $\left|\sum\limits_{j=1}^n\mu(\Pi_j)-\iint\limits_A\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv\right|<\varepsilon$

Док-во:

$n(u,v)$ непрерывно на G (по формуле) $\Rightarrow n(u,v)$ равномерно непрерывно на $\bar A \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)$, $\forall\delta\le\delta(\varepsilon)$

$\forall (u',v'),(u'',v''): \rho((u',v'),(u'',v''))<\delta(\varepsilon)$

$\Rightarrow |n(u',v')-n(u'',v'')|<\sqrt{\frac{2\varepsilon}{I}}$, где $I=\iint\limits_A\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$

(если $I=0$, то $\mu(A)=0$ и $\forall j=1..n$ и $\mu(A_j)=0$)

$T: d_T<\delta(\varepsilon)$, $(u,v)\in A_j$

$|n(u,v)-n(u_j,v_j)|^2\le\frac{2\varepsilon}{I}$

$((n(u,v)-n(u_j,v_j)),(n(u,v)-n(u_j,v_j)))=2-(n(u,v),n(u_j,v_j))$

$(n(u,v),n(u_j,v_j))\ge1-\frac{\varepsilon}{I}$

$$I-\sum_{j=1}^n\mu(\Pi_j)=\sum_{j=1}^n\iint\limits_{A_j}\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|(1-(n(u,v),n(u_j,v_j)))\,du\,dv<\sum_{j=1}^m\frac{\varepsilon}{I}\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv=$$

$$=\frac{\varepsilon}{I}\iint\limits_A\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv=\varepsilon$$

Пусть Φ — параметрически заданная поверхность, $\Phi=r(G)$, $\bar A\subset G$ и A — измеримое множество. Тогда площадью участка $\Phi_A=r(A)$ называется
$\iint\limits_A\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$.

Из леммы: площадь поверхности равна пределу $\sum\limits_{j=1}^n\mu(\Pi_j)$ при $d_T\to0$

Покажем корректность определения:

Пусть $\Phi = \bar r(G) = \bar R(D)$

(u,v) – координаты в G, (s,t) – координаты в D

$\lambda : \begin{cases} s = s(u,v) \\ t = t(u,v) \end{cases}$ – является диффеоморфизмом G на D, $\dfrac{D(s,t)}{D(u,v)} \neq 0$; $B = \lambda(A)$

Нужно показать: $\iint\limits_A \left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial u}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| du\,dv = \iint\limits_B \left| \left[\dfrac{\partial \bar R}{\partial s}, \dfrac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \right| ds\,dt$.

По формуле замены переменных в интеграле B измеримо,

$$\iint\limits_B \left| \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s}, \frac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \right| ds\,dt = \iint\limits_A \underbrace{\left| \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s}, \frac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \right|_{s = s(u,v),\, t = t(u,v)} \cdot \left| \frac{D(s,t)}{D(u,v)} \right|}_{= \left| \left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right|} du\,dv$$

$\bar r(u,v) = \bar R(s(u,v), t(u,v))$

$$\frac{\partial \bar r}{\partial u} = \frac{\partial \bar R}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \bar R}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar r}{\partial v} = \frac{\partial \bar R}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \bar R}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}$$

$$\left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right] = \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \bar R}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}, \frac{\partial \bar R}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial \bar R}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} \right] = \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s}, \frac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} + \left[\frac{\partial \bar R}{\partial t}, \frac{\partial \bar R}{\partial s} \right] \cdot \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} =$$

$$= \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s}, \frac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} \right] = \left[\frac{\partial \bar R}{\partial s}, \frac{\partial \bar R}{\partial t} \right] \cdot \left| \frac{D(s,t)}{D(u,v)} \right|$$

<u>Замечание</u> $\left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial u}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| = \left| \dfrac{\partial \bar r}{\partial u} \right| \cdot \left| \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right| \cdot \sin\alpha = \left| \dfrac{\partial \bar r}{\partial u} \right| \cdot \left| \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right| \cdot \sqrt{1 - \dfrac{\left(\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right)}{\left| \frac{\partial \bar r}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right|^2}} =$

$$= \sqrt{\left| \frac{\partial \bar r}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right)}$$

<u>Замечание</u> если $\Phi = \bar r(G)$ – параметрически заданная поверхность и существует

$\iint\limits_G \left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial u}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| du\,dv$ – он называется ПЛОЩАДЬЮ ПОВЕРХНОСТИ.

В общем случае, если Φ – компакт, Φ – гладкая поверхность, то ее можно разбить на конечное число участков (непересекающихся) параметрически заданных поверхностей $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, $\mu(\Phi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(\Phi_j)$

20.11.08 Лекция 23

<u>Замечание</u> Если $\Phi = \{(x,y,z),\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$, $\bar A \subset D$, A измеримо

$\Phi_A = \{ z = f(x,y),\ (x,y) \in A \}$

По формуле 1 $\left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial x}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial y} \right] = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \Rightarrow \left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial x}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial y} \right] \right| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$

$$\sigma(\Phi_A) = \iint\limits_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}\, dx\,dy.$$

<u>Определение</u> $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n$ называется КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ поверхностью, если при $j = 1, 2, \dots, n$ Φ_j – участок параметрически заданной поверхности

$\Phi_j = \bar r_j(A_j)$ $\quad$ $\Phi_i \cap \Phi_j$ или пусто, или состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых $i \neq j$

$x = x_j(u,v)$

$y = y_j(u,v)$ $\quad (u,v) \in G$ – параметр. зад. пов-ти

$z = z_j(u,v)$ $\quad \bar A_j \subset G_j$, A_j измеримо

$\sigma(\Phi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma(\Phi_j)$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

$\Phi = \bar r = \bar r(u,v)$ $\quad (u,v) \in G$ – параметрически заданная поверхность

$\Phi_A = \bar r(A)$, где $\bar A \subset G$, A измеримо; $F(x,y,z)$ определена на Φ_A, т.е.

$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ – функция, определенная на A

Берем произв. множество Φ_A

$T : A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$, A_j измеримо, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

$\forall \Phi_j$ имеет площадь: $\sigma(\Phi_j) = \iint\limits_{A_j} \left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial u}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| du\,dv$.

Возьмем набор точек $P_j \in \Phi_j$

Интегральная сумма $\sigma_T(F, P_1, \dots, P_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} F(P_j)\, \sigma(\Phi_j)$ выбор точек

<u>Определение</u>

Если $\exists\ I : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T : d_T < \delta,\ \forall P_1, \dots, P_n$ $\quad \left| \sigma_T(F, P_1, \dots, P_n) - I \right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \iint\limits_{\Phi_A} F(x,y,z)\, d\sigma = I$ (!)

Покажем что если ф-я непрерывна, интеграл $\exists$

<u>Утв.</u> Если $F(x,y,z)$ непрерывна на Φ_A (т.е. $F(\bar r(u,v)) \in C(A)$ и A – замкнутое измеримое множество на множестве изменения параметров (т.е. $A \subset G$), то $\exists \iint\limits_{\Phi_A} F(x,y,z)\, d\sigma =$

$$= \iint\limits_A F(\bar r(u,v)) \left| \left[\frac{\partial \bar r}{\partial u}, \frac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| du\,dv \quad (*)$$

<u>Док-во</u> Интеграл в правой части (*) $\exists$ как интеграл от непрерывной функции.

Если $\sigma(\Phi_A) = 0$, то $\iint \left| \left[\dfrac{\partial \bar r}{\partial u}, \dfrac{\partial \bar r}{\partial v} \right] \right| du\,dv = 0$, то $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A_j) = 0 \Rightarrow \mu(\Phi_j) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_T(F, P_1, \dots, P_n) = 0 \quad \forall T$ и $\forall P_1, \dots, P_n$.

Пусть $\sigma(\Phi_A) > 0$.

// Зачем мы требовали замкнутость?

$F(\bar r(u,v))$ – функция, непрерывная на компакте $A \Rightarrow F(\bar r(u,v))$ равномерно непрерывна на компакте $A \Rightarrow \exists \delta : \forall N', N'' \in A : \rho(N', N'') < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| F(\bar r(N')) - F(\bar r(N'')) \right| < \frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)}$$

Возьмем любое разбиение T: $d_T<\delta$: $\forall P_1,\dots,P_n$, $P_j\in\Phi_j \Rightarrow P_j = r(u_j,v_j)$, $(u_j,v_j)\in A_j$

$$\left|\sigma_T(F,P_1,\dots,P_n) - \iint_A F(r(u,v))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv\right| = \left|\sum_{j=1}^n F(r(u_j,v_j))\cdot\iint_{A_j}\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv -\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^n\iint_{A_j}F(r(u,v))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv\right| = \left|\sum_{j=1}^n\iint_{A_j}\big(F(r(u_j,v_j)) - F(r(u,v))\big)\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n\iint_{A_j}\underbrace{|F(r(u_j,v_j)) - F(r(u,v))|}_{<\frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)},\ \text{т.к. } \operatorname{diam}A_j<\delta}\cdot\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv < \frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)}\sum_{j=1}^n\iint_{A_j}\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv =$$

$$=\frac{\varepsilon}{\sigma(\Phi_A)}\cdot\underbrace{\iint_A\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv}_{\sigma(\Phi_A)} = \varepsilon,\ \text{ч.т.д.}$$

Замечание. Теорема остается справедливой, если $\bar A\subset G$, A измеримо, $F(r(u,v))\in C(\bar A)$

$$\Rightarrow \iint_{\Phi_A}F(x,y,z)\,d\sigma = \iint_A F(r(u,v))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$$

Покажем что интеграл не зависит от параметризации.

Проверка корректности определений

Покажем, что интеграл в правой части (*) не зависит от параметризации, т.е.

$r=r(u,v)$, $(u,v)\in G$; $R=R(s,t)$, $(s,t)\in D$; $\Phi=r(A)=R(B)$, $\bar A\in G$, $\bar B\subset D$, A измеримо, $\lambda: (u,v)\to(s,t)$ является диффеоморфизмом G на D, $\left|\frac{D(s,t)}{D(u,v)}\right|\ne 0$ в G, $F(r(u,v))\in C(G)$,

то $F(R(s,t))\in C(D)$, т.к. $F(r(\lambda^{-1}(u,v)))$ как суперпозиция непрерывных ф-й // $F(r(u,v)) = F(r(\lambda^{-1}(s,t)))$

/ B — измеримо (это автоматически получается)

Покажем, что $\iint_A F(r(u,v))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv = \iint_B F(R(s,t))\cdot\left|\left[\frac{\partial R}{\partial s},\frac{\partial R}{\partial t}\right]\right|ds\,dt \ominus$

// $F(r(u,v)) = F(r(\lambda^{-1}(s,t)))$

{Формула замены переменных в двойном интеграле} $\ominus \iint_A F(R(s,t))\Big|_{(s,t)=\lambda(u,v)}\cdot\left|\left[\frac{\partial R}{\partial s},\frac{\partial R}{\partial t}\right]\right|\cdot\left|\frac{D(s,t)}{D(u,v)}\right|du\,dv =$

функции будут одинаковы

$\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|$ — см. прошлую лекцию, формула доказана

$$= \iint_A F(r(u,v))\left|\left[\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right]\right|du\,dv$$

Площадь поверхности и поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора декартовых координат (длина векторного произведения не меняется).

Поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от направления нормали к параметр. заданной поверхности.

Если $\Phi=\bigcup_{j=1}^n\Phi_j$ — кусочно-гладкая (или гладкая компактная пов-ть), то

$$\iint_\Phi F(x,y,z)\,d\sigma \overset{def}{=} \sum_{j=1}^n\iint_{\Phi_j}F(x,y,z)\,d\sigma,\ \text{если } \forall j\in 1,\dots,n\ \exists\iint_{\Phi_j}F(x,y,z)\,d\sigma$$

// поверхность гладкая но неориентированная.

Поверхностные интегралы второго рода

$\Phi = r(G)$ параметр. заданная пов-ть; A: $\bar A\subset G$, A измеримо

$\bar n$ — непрерывное поле нормали единичной длины на G, одно из 2-х возможных

$\bar a(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ определено на Φ_A

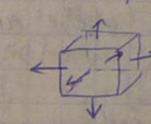
$(\bar a,\bar n)$ — скалярн.

$\iint_{\Phi_A}(\bar a,\bar n)\,d\sigma$ называется поверхностным интегралом 2-го рода (если интеграл $\exists$)

Свойство поверхностных интегралов 2 рода: при изменении ориентации ($\bar n\to-\bar n$) интеграл 2го рода меняет знак.

Замечание. Если $\Phi=\bigcup_{j=1}^n\Phi_j$ кусочно-гладкая, $\bar n_j$ — непрерывное поле нормали на Φ_j, то

$$\iint_{\Phi_A}(\bar a,\bar n)\,d\sigma \overset{def}{=}\sum_{j=1}^n\iint_{\Phi_j}(\bar a,\bar n_j)\,d\sigma$$



Можно определить интеграл 2го рода по ориентированной, компактной, гладкой поверхности $\Phi=\bigcup\Phi_j$, $\bar n$ — нормаль, $\iint_{\Phi_A}(a,n)\,d\sigma \overset{def}{=}\sum_{j=1}\iint_{\Phi_j}(a,n)\,d\sigma$ и значение суммы не зависит от способа разбиения.

Пусть $\bar a(0,0,R(x,y,z))$

$\Phi=\{z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$, $f\in C^1(D)$, $A\subset D$, A измеримо

$\bar n$ составляет острый угол с направлением оси z.

$$\bar n = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

$$\iint_{\Phi_A}(\bar a,\bar n)\,d\sigma = \iint_A R(x,y,f(x,y))\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_A R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

Еще одно обозначение для интеграла 2го рода: $\iint_{\Phi_A}R(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$

И еще одно ...: если $\bar n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\Rightarrow \iint_{\Phi_A}(\bar a,\bar n)\,d\sigma = \iint_{\Phi_A}(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,d\sigma$

/* Обычно */

Замечание. если $\Phi=\partial V$ (Φ — граница области V, V — область), Φ — гладкая пов-ть) $\Rightarrow$ Φ — ориентируема и обычно в качестве нормали к Φ берут внешнюю нормаль.

22.11.08 Лекция 24 (Элементы теории поля)

Биортогональные базисы

Пусть e_1, e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{e_i\}$

Опр. Базис $\{e^i\}$ называется биортогональным к $\{e_i\}$, если
$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \ne j \end{cases} \quad 1 \le i,j \le 3$$

Утв 1. Для любого базиса $\{e_i\}$ $\exists!$ базис $\{e^i\}$, биортогональный к $\{e_i\}$.

Док-во: $e^1 \perp e_2$, $e^1 \perp e_3 \Rightarrow e^1 = \lambda [e_2, e_3]$ (e^1 пропорционален векторному произведению)

$(e_1, e^1) = 1 \Rightarrow \lambda(e_1, [e_2, e_3]) = 1$

$\ne 0$, т.к. $\{e_i\}$ – базис, это V □, построенного на векторах e_1, e_2, e_3

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{(e_1, [e_2, e_3])} \Rightarrow e^1 = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, [e_2, e_3])}$$ – определен однозначно.

Аналогично
$$e^2 = \frac{[e_3, e_1]}{(e_2, [e_3, e_1])}, \quad e^3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_3, [e_1, e_2])}$$

Покажем, что e^1, e^2, e^3 ЛНЗ. Пусть $\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 = 0$. Умножаем скалярно на e_i

$\Rightarrow \alpha_j (e^j, e_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad 1 \le i \le 3$
$j = i$
$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0 \Rightarrow \{e^i\}$ – базис

Замечание 1. $\{e^i\}$ биортогонален к $\{e_i\} \Rightarrow \{e_i\}$ биорт. к $\{e^j\}$.

Замечание 2. Если $\{e_i\}$ – декартов ортонорм. базис (ОНБ), то $e^j = e_j$, $1 \le j \le 3$

Преобразование базисов

(тензорная форма записи) $\alpha_i^j e_j = \sum_{j=1} \alpha_i^j e_j$. В выражении происходит суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам

Пусть $\{e_i\}$, $\{e_{i'}\}$ – 2 пары базисов в $\mathbb{R}^3$. Напишем формулу преобразования базисов.

$$e_{i'} = b_{i'}^i e_i \quad \left(\text{т.е.} = \sum_{i=1}^3 b_{i'}^i e_i\right), \quad \{b_{i'}^i\} \text{ – матрица перехода}$$

$e_i = b_i^{i'} e_{i'}$ $\quad \|b_{i'}^i\|$ и $\|b_i^{i'}\|$ взаимно обратны

$$b_{i'}^i b_j^{i'} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

Пусть $\{e^i\}$, $\{e^{i'}\}$ – биортогон. базисы к $\{e_i\}$, $\{e_{i'}\}$

$e^i = c_{j'}^i \cdot e^{j'}$
$e^{i'} = c_j^{i'} \cdot e^j$ $\quad \|c_{j'}^i\|$ и $\|c_j^{i'}\|$ взаимно обратны

Утв 2. $b_i^{i'} = c_i^{i'}$, $b_{i'}^i = c_{i'}^i$, $1 \le i, i' \le 3$

Док-во: $(e_i, e^{j'}) = (b_i^{i'} e_{i'}, e^{j'}) = b_i^{i'} (e_{i'}, e^{j'}) = b_i^{j'}$ $\quad$ ($1 \Leftrightarrow i' = j'$)

$(e_i, c_j^{j'} e^j) = c_j^{j'} (e_i, e^j) = c_i^{j'} \Rightarrow b_i^{j'} = c_i^{j'}$, ч.т.д.

Аналогично получаем $b_{i'}^i = c_{i'}^i$.

Инварианты линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в $\mathbb{R}^3$

Опр. $(e^i, \mathcal{A} e_i) = \operatorname{div} \mathcal{A}$ – дивергенция оператора $\mathcal{A}$; $\quad [e^i, \mathcal{A} e_i] = \operatorname{rot} \mathcal{A}$ – ротор оператора $\mathcal{A}$ $\quad // \sum_{i=1}^3 (e^i, \mathcal{A} e_i)$

Проверка корректности

Пусть $\{e_{j'}\}$ – другой базис. Покажем, что $(e^{j'}, \mathcal{A} e_{j'}) = (e^i, \mathcal{A} e_i)$

(аналогично $[e^{j'}, \mathcal{A} e_{j'}] = [e^i, \mathcal{A} e_i]$)

$$(e^{j'}, \mathcal{A} e_{j'}) = (b_l^{j'} e^l, \mathcal{A} b_{j'}^i e_i) = b_l^{j'} \cdot b_{j'}^i (e^l, \mathcal{A} e_i) = \delta_l^i (e^l, \mathcal{A} e_i) = (e^i, \mathcal{A} e_i)$$
(по 2-м индексам)

/ этови суммировании по i, l, j'! По всем 3-м индексам.

/* Выразим div через произв. базис */

Пусть $A = \|a_j^i\|$ – матрица $\mathcal{A}$ в базисе $\{e_i\}$

$\mathcal{A} e_j = a_j^i e_i$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} e_i = a_i^j e_j$

$\operatorname{div} \mathcal{A} = (e^i, \mathcal{A} e_i) = (e^i, a_i^j e_j) = a_i^j (e^i, e_j) = a_i^j \delta_j^i = a_i^i = \underline{\operatorname{tr} A}$

Пусть $\{e_i\}$ – декартов базис, $e^i = e_i$, $1 \le i \le 3$

$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$

$\operatorname{rot} \mathcal{A} = [e^i, \mathcal{A} e_i] = a_i^j [e^i, e_j] = e_1(a_2^3 - a_3^2) + e_2(a_3^1 - a_1^3) + e_3(a_1^2 - a_2^1)$

$$\operatorname{rot} \mathcal{A} = (a_2^3 - a_3^2,\ a_3^1 - a_1^3,\ a_1^2 - a_2^1)$$

Элементы теории поля

$u(x, y, z)$ – скалярна в D, $M \in D$

Тогда u дифференцируема в точке M, если $\Delta u = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z + o(|\Delta r|)$,

$\{\Delta u = u(r_M + \Delta r) - u(r_M)$, r – координата точки M $(M(x_M, y_M, z_M))$, $\Delta \vec{r}\,(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\}$?

Это представление единственно, при этом $\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$

$\Delta u = (\bar{\alpha}, \Delta \bar{r}) + o(|\Delta r|)$, где $\bar{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ / $\alpha = \operatorname{grad} u|_M$

Определение. u дифференцируема в т. M, если $\Delta u = (\bar{\alpha}, \Delta \bar{r}) + o(|\Delta r|)$ (*)

Действительно, если u дифф-на в т. M, то (*) верно и справедливо, причем :))
$\alpha = \operatorname{grad} u|_M$

Обратно: если есть (*), то в декартовых координатах $\Delta u = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z + o(|\Delta r|)$
$\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \Delta \bar{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)\} \Rightarrow u$ дифф-на

Т.о. $\operatorname{grad} u|_M$ не зависит от выбора декартовых координат

$\bar{\ell}$ – вектор единичн. длины $\quad \frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{h \to 0} \frac{u(M + h \cdot \bar{\ell}) - u(M)}{h}$

Если u дифф-ма в т. M, то $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(\operatorname{grad} u, h\bar{l}) + \bar{o}(h)}{h} = (\operatorname{grad} u, \bar{l})$

Пусть $\bar{a}$ - векторное поле в области D

(в декартовых координатах (x, y, z) $\bar{a}(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

Определение 1

$\bar{a}$ дифф-ма в точке $M \in D$, если P, Q, R дифф-мы в точке M.

$$\Delta\bar{a} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} P, \Delta\bar{r}) + \bar{o}_1(|\Delta\bar{r}|) \\ (\operatorname{grad} Q, \Delta\bar{r}) + \bar{o}_2(|\Delta\bar{r}|) \\ (\operatorname{grad} R, \Delta\bar{r}) + \bar{o}_3(|\Delta\bar{r}|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_M \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \bar{o}(|\Delta\bar{r}|) =$$

$$= A \cdot \Delta\bar{r} + \bar{o}(\Delta\bar{r}) =$$

$$\bar{o}(|\Delta\bar{r}|) = \begin{pmatrix} \bar{o}_1(|\Delta\bar{r}|) \\ \bar{o}_2(|\Delta\bar{r}|) \\ \bar{o}_3(|\Delta\bar{r}|) \end{pmatrix} \qquad = \mathcal{A}\Delta\bar{r} + \bar{o}(\Delta\bar{r})$$

линейный оператор с матрицей в декарт. базиса (x, y, z)

Определение 1' $\bar{a}$ дифф-ма в т. M, если $\Delta\bar{a} = \mathcal{A}\Delta\bar{r} + \bar{o}(\Delta\bar{r})$ (**)

Если P, Q, R дифф-ны в $(\cdot)$ M (в точке M) $\Rightarrow$ (**) справ. обратно: в декартовом базисе x, y, z

A - матрица оператора $\mathcal{A}$

(**) $\Rightarrow \Delta P, \Delta Q, \Delta R$ - дифф-мы, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}$

т.к. (**) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{o}_1(|\Delta\bar{r}|) \\ \bar{o}_2(|\Delta\bar{r}|) \\ \bar{o}_3(|\Delta\bar{r}|) \end{pmatrix}$

Опр. Пусть $\bar{a}$ дифференцируем в точке M

$\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{div}\mathcal{A}$

$\operatorname{rot}\bar{a} = \operatorname{rot}\mathcal{A}$ — линейный оператор из (**)

В декартовых координатах (x, y, z) $\operatorname{div}\mathcal{A} = \operatorname{tr}\mathcal{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

//Что же будет у нас с ротором?

"мнемоническое" (!) правило: и только!

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = [\nabla, \bar{a}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$\operatorname{rot}\mathcal{A} = (a_2^3 - a_3^2, a_3^1 - a_1^3, a_1^2 - a_2^1)$

Определение Пусть $\bar{l}$ - вектор единичной длины $\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{l}}\Big|_M = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\bar{a}(M + h\cdot\bar{l}) - \bar{a}(M)}{h}$

//производная по направлению

Пусть $\bar{a}$ дифференцируема (или это он") в точке M $\Rightarrow$ (**)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{A}(h\bar{l}) + \bar{o}(|h|)}{h} = \mathcal{A}\bar{l}$$

Лекция 25

27.11.08

Повторные операции теории поля

$\exists\ \bar{a}$ дважды дифференцируемо в области D,

и дважды дифф-мо в области D //Что ни вообще можно от чего взять?

$\operatorname{grad} u$	1 $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$
$\operatorname{div}\bar{a}$	2 $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$
$\operatorname{rot}\bar{a}$	3 $\operatorname{div}\operatorname{rot} a$
	4 $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$
	5 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}$

инварианты (независ. от выбора Дек координат)

$\exists\ \bar{a}(P, Q, R)$. Тогда

1. 1) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right)$

2) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ Оператор Лапласа.

$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$:)

3) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$

$= 0$, т.к. равенство смешанных производных имеет место

4) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} = i\cdot\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right) +$$

$$+ j\cdot\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right) +$$

$$+ k\cdot\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial y}\right) =$$

$$= i\Big(-\Delta P + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\bar{a}}\Big) + j\Big(-\Delta Q + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big) + k\Big(-\Delta R + \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\bar{a}}\Big) =$$

$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} - \Delta\bar{a}$ (где $\Delta\bar{a}$ $(\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$

$\iint\limits_S (\bar{a}, \bar{n})\,d\sigma$ называется **потоком поля** $\bar{a}$ через ориент. поверхность S

Формула Остроградского - Гаусса

Пусть G - область в $\mathbb{R}^3$, G ограничено, граница ∂G - кусочно-гладкая пов-ть (как мы определяли раньше и выше)

На $\forall$ кусочке своё непрер. поле нормали внешнее

$\bar{n}$ - внешняя нормаль к ∂G, $\bar{a}(P, Q, R)$

$P, Q, R \in C(\bar{G})$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в G и продолжаемы до $\bar{G}$

$$\underbrace{\iint\limits_{\partial G}(\bar{a}, \bar{n})\,d\sigma}_{\text{поток поля } \bar{a} \text{ через внешнюю нормаль}} = \iiint\limits_G \operatorname{div} a\,dx\,dy\,dz \quad (*)$$

ФОРМУЛА Остроградского - Гаусса

// Доказывать будем через частный случай

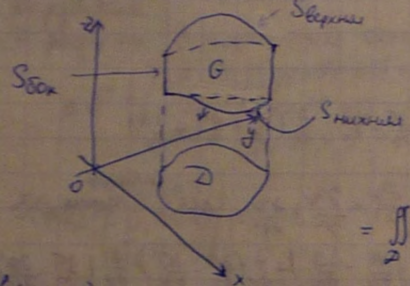
1. Частный случай

$\exists$ векторное поле имеет вид $\bar{a}(0,0,R)$, а G – „выпукло в направлении оси z",

т.е. $G=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\}$,

∂D – кусочно гладкая кривая, $f_1, f_2 \in C^1(\bar{D})$, где $\bar{D}$ – окрестность $\bar{D}$

$f_1(x,y)<f_2(x,y)$ в D



Докажем справедливость (*).

$$\iiint_G \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz = \iiint_G \frac{dR}{dz}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_D dx\,dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \{\text{по формуле Ньютона-Лейбница}\} =$$

$$= \iint_D R(x,y,f_2(x,y))\,dx\,dy - \iint_D R(x,y,f_1(x,y))\,dx\,dy \quad \boxed{\square}$$

$\{$Из (*)$\}$ $\iint_{\partial G}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma = \iint_{S_{верхн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma + \iint_{S_{нижн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma + \iint_{S_{бок}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma$

верх $x=x$, $y=y$, $z=f_2(x,y)$

$\bar{n} \parallel \left[\left(1,0,\frac{\partial f_2}{\partial x}\right),\left(0,1,\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\right]$

$$\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{matrix}$$

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|}$$ т.к. $\bar{n}$ составляет острый угол с направлением (плюсом) оси z.

$\exists\ a(0,0,R)$

$$\iint_{S_{верхн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma = \iint_{S_{верхн}} R\frac{1}{\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|}\,d\sigma = \left\{\begin{matrix}\text{учитывая, что} \\ d\sigma = \left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|\end{matrix}\right\} = \iint_D R(x,y,f_2(x,y))\cdot\frac{1}{\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|}\cdot\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|\,dx\,dy$$

$$= \iint_D R(x,y,f_2(x,y))\,dx\,dy$$

низ

$$\frac{\bar{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)}{\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\|}$$ $\{$нормаль смотрит вниз$\}$

$$\iint_{S_{нижн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma = -\iint_D R(x,y,f_1(x,y))\,dx\,dy$$

боковая поверхность – бок

На $S_{бок}$ $\bar{n}\perp Oz$, т.к. $\forall (x,y)\in\partial D$, $(x=x_0, y=y_0, f_1(x_0,y_0)\le z\le f_2(x_0,y_0))\in S_{бок}$ $\parallel Oz$

$(\bar{a},\bar{n})=0$, т.к. $\bar{a}\parallel Oz$ $\to \iint_{S_{бок}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma=0$

$$\Rightarrow \boxed{\square} = \iint_{S_{верхн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma + \iint_{S_{нижн}}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma + \iint_{S_{бок}}\overset{0}{(\bar{a},\bar{n})}\,d\sigma$$

Аналогично: ф-ла (*) справедлива, когда $\bar{a}(P,0,0)$,

G – „выпукла в направлении оси x", т.е. $G=\{(y,z)\in D,\ f_1(y,z)<x<f_2(y,z)\}$,

∂D – кусочно гладкая, D – ограничена

f_1, f_2 имеют непрерывные частн. пр. в окр. $\bar{D}$, $f_1<f_2$ в D

(*) справедлива $\bar{a}(0,Q,0)$, G – „выпукла в направлении оси y"

Пусть $\bar{a}(P,Q,R)$, $P,Q,R\in C(\bar{G})$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрер. в G и продолжимы до непрерывных в $\bar{G}$

G выпукла относительно осей x,y,z. Покажем справедливость (*).

$\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3$

$(P,0,0)$ $(0,Q,0)$ $(0,0,R)$ $\to$ к $\forall$ из них можно применить ф-лу Остр. Гаусс

$\to \iiint_G \operatorname{div}\bar{a}_i\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G}(\bar{a}_i,\bar{n})\,d\sigma \quad \{i=1,2,3\}$

$\Downarrow$ суммируем по всем i

$$\iiint_G \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma, \text{ ч.т.д.}$$

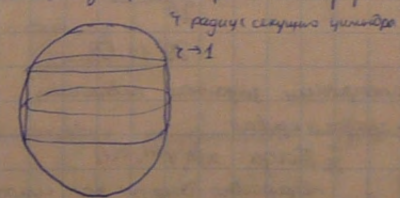
Для сферы (или гладкой поверхности, кот. огранич. область, между двумя „графиками", огр-но $\parallel$ ей плоскостей) не ограничит. ч. накл., т.к.

∂G: $x^2+y^2+z^2=1$ | $-\sqrt{1-x^2-y^2}<z<\sqrt{1-x^2-y^2}$

G: $x^2+y^2+z^2<1$ | D: $x^2+y^2<1$. Частные производные, но ∂D $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ не определены.

Но формула (*) остается справедливой

(надо просто применить предельный переход)



Еще одно обобщение

G можно „разрезать" на конечное число частей, выпуклых относительно оси z

. . . . оси x

. . . . оси y

$\bar{a}=(P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R)$

Если $\bar{a}(x,y,z)=\bar{r}$, то $\operatorname{div}\bar{a}=3 \left(=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)$

$\Downarrow$

$$V(G)=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial G}(\bar{r},\bar{n})\,d\sigma$$

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\partial G}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma.$$

Опр] $\bar{a}$ – непрерывно дифференцир. в поле, опр. в области $D\subset\mathbb{R}^3$

$\bar{a}$ называется СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ, если $\forall S$ – ориент. замкнут. гладкой пов-ти

$$\iint\limits_S(a,n)\,d\sigma=0.$$

Если $\bar{a}$ – соленоидальна в D, то $\operatorname{div}\bar{a}=0$ в D. Иначе $\exists M\in D$ – $\operatorname{div}\bar{a}\big|_M\neq 0$

$\exists B$ – шар с центром в точке M: $\operatorname{div}\bar{a}\big|_B>c>0$

(или –"– $-c<0$)

$\Rightarrow \iint\limits_{\partial B}(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma=\iiint\limits_B\operatorname{div}\bar{a}\,d\sigma\neq 0$. Противоречие.

Пример $D=\mathbb{R}^3\setminus 0$

$\bar{a}=\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. $\operatorname{div}a=0$ $\quad S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, n – внешняя нормаль $\bar{n}(x,y,z)=\bar{r}$

$$\iint\limits_S(\bar{a},\bar{n})\,d\sigma=\iint\limits_S\frac{x^2+y^2+z^2=1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,d\sigma=\iint\limits_S d\sigma=4\pi\neq 0$$

Если D такая, что любая замкнутая гладкая пов-ть S является границей области G, где $G\subset D$, то $\operatorname{div}a=0\Rightarrow$ поле $\bar{a}$ соленоидально

(интеграл по $\forall$ пов-ти $=0$)

// Рулонахательство)

Лекция 26

29.11.08

Пусть G – область в $\mathbb{R}^2$, $\Phi=\bar{r}(G)$ – параметрически заданная поверхность

Возьмем кривую $\gamma:\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases}$ $t\in[a,b]$ – гладкая кривая

$\Gamma=\bar{r}(\gamma)$, т.е. $\begin{cases}x=x(u(t),v(t))=x(t)\\ y=y(u(t),v(t))=y(t)\\ z=z(u(t),v(t))=z(t)\end{cases}$ $\quad$ Тогда $x(t),y(t),z(t)$ непрерывно дифф-мы как суперпозиции.

$\Rightarrow$ Γ – гладкая кривая $\quad t\in[a,b]$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}v'(t)\neq 0,$$ т.к. $\frac{\partial\bar{r}}{\partial u},\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}$ – линейно независимы, $u'(t)$ и $v'(t)$ не обращаются одновременно в 0.

Если $\Phi=\{z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$, $f\in C^1(D)$,

$\Gamma(t):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\subset\Phi$, то $\gamma(t):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ тоже гладкая кривая

гладкая кривая

$x(t),y(t)$ непр. диффер.

$$0\neq\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\\ z'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\\ \frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\\ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t)\end{pmatrix}$$

т.к. Γ гладкая кривая

Если $x'(t)=y'(t)=0\Rightarrow z'(t)=0\Rightarrow$ $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0\Rightarrow\gamma(t)$ – гладкая кривая

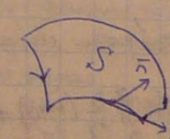
Формула Стокса

Пусть $\Phi=\bar{r}(G)$ – параметрически заданная пов-ть

$\bar{D}\subset G$, D – такая область, ∂D {граница D :)} – кусочно-гладкая

$S=\bar{r}(D)$ – участок поверхности

$\partial S\overset{def}{=}\bar{r}(\partial D)$ – кусочно-гл. кривая, ∂S – край



Возьмем $\bar{n}$ – непрерывное поле нормали на S

$\bar{\tau}$ – касательный вектор единичной длины на ∂S,

$\bar{\tau}$ выбираем так, чт. при обходе вдоль границы наша поверхность остается слева, если смотреть с конца нормали.

Зададим векторное поле $\bar{a}$ (то, по чему мы будем инт-ть).

$\bar{a}$ – непрерывно дифф-мое векторное поле (т.е. $\bar{a}(P,Q,R)$, P,Q,R – непрер. дифференцируемы в окрестности $\bar{S}=S\cup\partial S$).

Тогда справедлива формула Стокса:

$$\int\limits_{\partial S}(\bar{a},\bar{\tau})\,ds=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n})\,d\sigma$$

ФОРМУЛА СТОКСА

инвариантно относительно выбора декартовых координат

(т.к. относит. декартовых координат инвариантно скалярное произведение)

В декартовых координатах $\displaystyle\int\limits_{\partial S}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$

$$=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$/* \begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} */$ $\quad$ // если $z=const\Rightarrow$ ф-ла Грина

1. Частный случай: существует декарт. система координат: S однозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей, т.е.

$S = \{ z = f_1(x,y),\ (x,y)\in D_1 \} = \{ x = f_2(y,z), (y,z)\in D_2 \} = \{ y = f_3(z,x), (z,x)\in D_3 \}$,

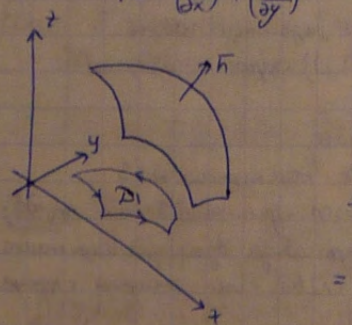
D_1, D_2, D_3 – ограниченные области с кусочно гладкими границами,

f_1, f_2, f_3 – непр. дифф. но в окрестности D_1, D_2, D_3.

Покажем, что $\int\limits_{\partial S} P dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)$

Аналогично $\int\limits_{\partial S} Q dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma$, $\int\limits_{\partial S} R dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma$

$$\vec n = \frac{\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}}$$
, т.е. $\vec n$ составляет острый угол с осью Oz.



∂S: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ то $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ – граница D_1 обходится так, что D_1 остается слева.

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma = \iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=f_1(x,y)} \cdot \left(\frac{-\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\sqrt{\dots}}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{z=f_1(x,y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}}\Bigg) \cdot \sqrt{\dots}\, dx\,dy = \{\text{корни сокращаются}\} =$$

$$= -\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{z=f_1(x,y)} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{z=f_1(x,y)}\right) dx\,dy = \iint\limits_{D_1} \frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y, f_1(x,y))\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\partial D_1} P(x,y,f_1(x,y))\,dx = \int\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx$$

Утв 1 $\exists N \in \overline{D}$, $\exists M \in \tau(D)$ – ее образ. Тогда существует такая окрестность W_N точки N, $W_N \subset G$: существует декартова система координат, в которой $S_N = \tau(W_N)$, однозначно проект. на каждую из координатных плоскостей.

Док-во: Возьмем декартову систему координат x, y, z, в которой $\tau(M)$ составляет равные острые углы с осями координат

$$\vec n = \frac{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}}$$

$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \neq 0$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \neq 0$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$

Аналогично доказательству того, что параметрически заданная поверхность является гладкой поверхностью $\exists\, W_1(N)$: $\tau(W_1(N)) = \{z = f_1(x,y), (x,y)\in D_1\}$

$\exists\, W_2(N)$: $\tau(W_2(N)) = \{y = f_2(z,x), (z,x)\in D_2\}$

$\exists\, W_3(N)$: $\tau(W_3(N)) = \{x = f_3(y,z), (y,z)\in D_3\}$

$W(N)$ – открытый круг с центром в точке N;

$\overline{W}(N) \subset W_1(N) \cap W_2(N) \cap W_3(N)$

S_N – удовлетворяет утверждению, ∂S_N – гладкая кривая; граница проекции S_N на координатные плоскости – тоже гладкая кривая

$\forall$ поверхность S, τ-0, можно разрезать на много маленьких кусочков, и в $\forall$ взять свою систему координат.

Утв. 2 $\exists \delta > 0$: $\forall Q \subset \overline{D}$, $\operatorname{diam} Q < \delta$, $\exists N$, W_N удовлетворяет условию 1: $Q \subset W_N$

Док-во предположим противное $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists Q_k \subset \overline{D}$, $\operatorname{diam} Q_k < \frac{1}{k}$: $\forall N, W_N$, удовлетворяющих утверждению 1, $Q_k \not\subset W_k$

$P_k \in Q_k$, можно $P_{k_\ell} \to N' \in \overline{D}$. Но тогда $\exists\, \ell_0$: $Q_{k_\ell} \subset W_{N'}$, $\ell \geq \ell_0$ – противоречие.

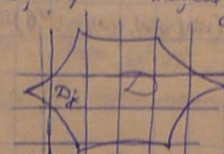
Доказательство формулы Стокса для участка параметрически заданной поверхности

Доказательство: $\delta > 0$, δ удовлетв. утв. 2

$\overline{D}$ разобьем конечным числом кусочно гладких кривых:

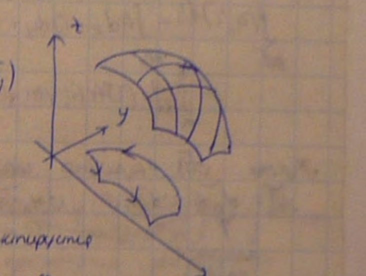
$\overline{D} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{D}_j$, D_j – область, $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$

∂D_j – кусочно гладкая



$\operatorname{diam} D_j < \delta$ $\quad \overline{S} = S \cup \partial S = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{S}_j$, $\overline{S}_j = \tau(\overline{D}_j)$

$S_j = \tau(D_j) \to S_i \cap S_j = \varnothing$



Для каждого S_j существует своя система координат: S_j однозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей $\Rightarrow$

$\int\limits_{\partial S_j} (\overline{a}, \tau)\,ds = \iint\limits_{S_j} (\operatorname{rot}\overline{a}, \overline{n}) d\sigma$ + суммируем по j

$\left\{ \Big| \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial S_j} (\overline{a}, \tau) d\sigma = \iint\limits_{\partial S} (\overline{a}, \overline{\tau}) d\sigma \right.$

(т.к. интегралы по общим частям краев ∂S_j сократятся) }

$\iint\limits_S (\operatorname{rot} a, n)\, d\sigma$

//Все эти формулы – Остроградского-Гаусса, Ньютона-Лейбница, Грина, Стокса – на самом деле 1 и та же формула! //рукомахательство//

$f(x)$

$R^{\prime} dx + Q^{\prime} dy + R^{\prime} dz$

$\alpha_1 dy\, dz + \alpha_2\, dz\, dx + \alpha_3\, dx\, dy$

$B\ dx dy dz$

Формула Стокса имеет такой вид:

$\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \iint\limits_{\Omega} d\omega$ дифференциал дифференциальной формы

интеграл по границе дифференциальной формы.

$\int df = f(b) - f(a)$

//Следующ. лекция – независимость интегралов от пути интегрирования

(с. 3 Шт.)

4. 12. 08 Лекция 27

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Опр. Пусть векторное поле $\bar a$, определенное в области D, называется потенциальным, если $\exists U: \bar a = \operatorname{grad} U|_D$.

U называется потенциалом $\bar a$.

Утв. Пусть $\bar a$ непрер. в D. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. $\bar a$ потенциально в D,
2. $\forall A, B \in D$ $\int\limits_{AB} (a,\tau) ds$ (τ – касательный вектор единичной длины) не зависит от формы кривой $\overset{\frown}{AB}$.

При этом $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\bar a, \bar\tau) ds = U(B) - U(A)$, где U – потенциал $\bar a$.

Доказательство: 1) → 2) $\bar a(P,Q,R)$, $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ – гладкая кривая $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$

$$\int\limits_{AB} (a,\tau) ds = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big[\frac{\partial U}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\Big] dt$$

$$= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\big(U(x(t),y(t),z(t))\big) dt = \{Н\text{-}Л\} = U(x(b),y(b),z(b)) - U(x(a),y(a),z(a)) = U(B) - U(A)$$

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ – кусочно-гладкая. $A_0 = A, \dots, A_{j-1}, A_n = B$

$\overset{\frown}{AB} = A_0A_1 \cup A_1A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n$

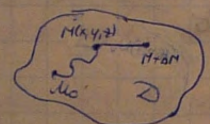
гладкая кривая

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{A_{j-1}A_j} Pdx + Qdy + Rdz \ominus$$

$$\ominus \sum_{j=1}^{n} \big(U(A_j) - U(A_{j-1})\big) = U(A_n) - U(A_0) = U(B) - U(A)$$

2) → 1) Фиксируем $M_0 \in D$

$U(M) = \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz$



Покажем. $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ (аналогично $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$)

$M(x,y,z)$ $M + \Delta M = (x + \Delta x, y, z)$

$$\frac{U(M+\Delta M) - U(M)}{\Delta x} = \int\limits_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \Big\{\gamma \quad t \in [x, x+\Delta x],\ x = t,\ y = y \text{ постоянные},\ z = z\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} P(t,y,z) dt = \frac{1}{\Delta x} P(\xi, y, z) \Delta x$$

формула среднего значения $\quad \xi$ между x и $x + \Delta x$

Т.о. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{U(M+\Delta M) - U(M)}{\Delta x} = P(x,y,z) \Rightarrow \bar a = \operatorname{grad} U|_D$ (аналогично для Δx и Δy)

$\frac{\partial U}{\partial x}$

Пусть $P, Q, R \in C^1(D)$.

Если $\bar a$ потенциально, то $\bar a = \operatorname{grad} U \Rightarrow \operatorname{rot} \bar a = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$

Определение. Поле $\bar a$ называется безвихревым в области D, если $\operatorname{rot} a = 0$.

Необходимое условие потенциальности

$\bar a \in C^1(D)$, $\bar a$ – потенциально $\Rightarrow \operatorname{rot} a = 0$ (т.е. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$)

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

//Для необходимости достаточно выполнения этого условия.

Замечание. На плоскости, если $\bar a$ потенциально $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Обратное не всегда верно, т.к. $\operatorname{rot} \bar a = 0 \not\Rightarrow \bar a$ – потенциально.

Пример

$\exists D = R^2 \setminus \{0\}$ (или $R^3 \setminus \{x=0, y=0\}$ – т.е. R^3 без оси z)

$\bar a = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ (или $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \bar a \text{ – безвихревое}$$

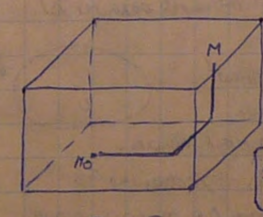
Если $\bar a$ потенциально, то $\oint\limits_\gamma$: $x^2 + y^2 = 1$ ($x^2+y^2 = 1$, $z = 0$)

$$0 = \oint\limits_\gamma Pdx + Qdy = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\varphi(-\sin\varphi)}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

– противоречие ($0 \neq 2\pi$)

//но для частного случая, когда область прямоуг-я

Утв. Пусть D – прямоугольный параллелепипед в R^3, $\bar a \in C^1(D)$, $\operatorname{rot} a = 0$. Тогда $\bar a$ потенциально.



$M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ $\quad N(x,y,z)$

$$U(M) = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0) dt}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0) dt}_{I_2} + \underbrace{\int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, t) dt}_{I_3}$$

Покажем что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{\partial I_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial I_1}{\partial x} = P(x, y_0, z_0)$$

$$I_2 = \int\limits_{y_0}^{y} dt \left(Q(x_0, t, z_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z) ds\right) = \int\limits_{y_0}^{y} dt\, Q(x_0, t, z_0) + \int\limits_{y_0}^{y} dt \int\limits_{x_0}^{x} ds\, \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z_0) =$$

$$= \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z_0) dt + \int\limits_{x_0}^{x} \left(\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t, z_0) dt\right) ds$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial x} = 0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t,z_0)\,dt$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial x} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,t)\,dt = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial t}(x,y,t)\,dt = P(x,y,z) - P(x,y,z_0)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{\partial I_3}{\partial x} = P(x,y,z)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial I_2}{\partial y} = Q(x,y,z_0), \quad \frac{\partial I_3}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,t)\,dt = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,y,t)\,dt = Q(x,y,z) - Q(x,y,z_0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$$

<u>Существенная теорема</u>. Если $\bar a \in C^1(\bar D)$, D – односвязная область, то $\operatorname{rot} \bar a = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bar a$ – потенциально

D – однсв. область односвязна $\Leftrightarrow$ $\forall$ 2 точки можно „стянуть" в 1, не выходя за пределы области.

Пусть $\underset{\subset D}{\gamma(t)}: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, $x,y,z \in C[a,b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

$\gamma(t)$ можно стянуть в точку (в области D), если $\exists\, \mathcal{F}(t,s)$:
$[a,b] \times [0,1] \to D$, $\mathcal{F} \in C([a,b] \times [0,1])$,
$\mathcal{F}(t,0) = \gamma(t)$,
$\mathcal{F}(t,1) = M \in D$ точка
$\mathcal{F}(a,s) = \mathcal{F}(b,s)$ $\forall s \in [0,1]$

$\Downarrow$
$\gamma_s(t) = \mathcal{F}(t,s)$ – непр. замкнут контур.

Область D называется односвязной, если $\forall$ замкнутый контур, принадлежащий D можно стянуть в точку (в области D).

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ – не односвязная!

Шаровой слой – односвязная область
$\alpha^2 < x^2 + y^2 + z^2 < \beta^2$ – односв. обл.

316 стр

<u>Эквив. определение</u>. Если D – огр. обл. $\in \mathbb{R}^2$, то D – односвязная $\Leftrightarrow$
∂D связна (т.е. состоит из одн. комп. связн.)